7 空間図形

テーマ１〈立体の表面積，体積〉

例題 □(1) 右の図１のような四角形を，直線 ℓ を軸として１回転してできる立体の表面積と体積を求めなさい。

□(2) 右の図２の投影図で表された立体の表面積と体積を求めなさい。

図１

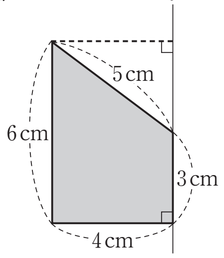
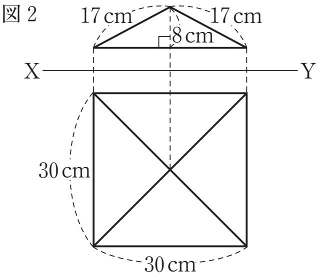


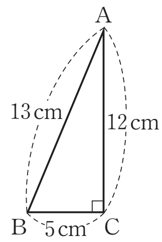
図２



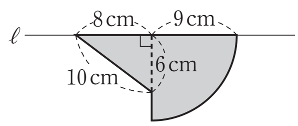
1 右の図のように，∠ACB＝90°，AB＝13 cm，BC＝5 cm，AC＝12 cm の △ABC がある。この △ABC を，辺 AC を軸として１回転してできる立体をＰ，辺 BC を軸として１回転させてできる立体をＱとする。次の問いに答えなさい。

□(1) 立体Ｐの表面積と立体Ｑの表面積とでは，どちらの方が何 cm^2 大きいですか。

□(2) 立体Ｐの体積は，立体Ｑの体積の何倍ですか。

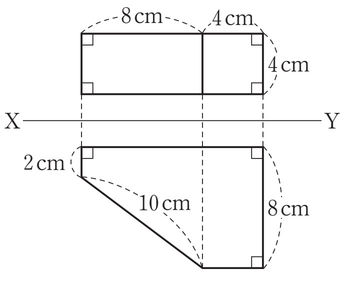


2 右の図は，直角三角形と中心角が 90° のおうぎ形を組み合わせた図形である。
□ この図形を，直線 ℓ を軸として１回転してできる立体の表面積と体積を求めなさい。

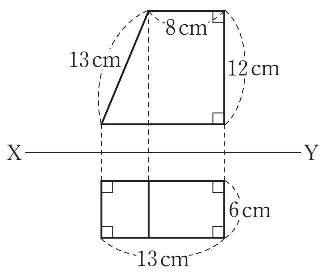


3 次の投影図で表された立体の表面積と体積を求めなさい。

□(1)



□(2)

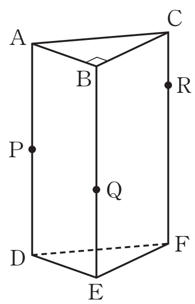


4 右の図は，底面が直角三角形の三角柱であり，∠ABC＝90°，AB＝4 cm，BC＝6 cm，AD＝12 cm である。また，点Ｐ，Ｑ，Ｒはそれぞれ辺 AD, BE, CF 上の点で，AP＝6 cm，BQ＝7 cm，CR＝3 cm である。この立体を，次の３点を通る平面で切って２つに分けるとき，頂点Ｅをふくむ方の立体の体積を求めなさい。

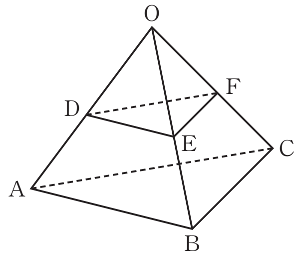
□(1) ３点Ｐ，Ｑ，Ｆ

□(2) ３点Ａ，Ｑ，Ｒ

□(3) ３点Ｐ，Ｑ，Ｒ



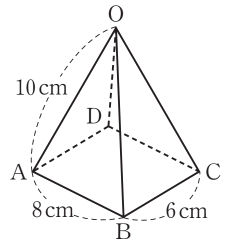
テーマ2〈相似な立体の表面積と体積，空間図形と三平方の定理〉



例題 (1) 右の図の三角錐 OABC において，面 DEF と面 ABC は平行で，三角錐 ODEF と三角錐 OABC の表面積の比は 9：25 である。このとき，次の問いに答えなさい。

□① 線分 AD の長さが 6 cm のとき，線分 OD の長さを求めなさい。

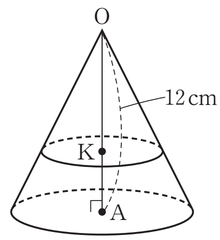
□② 三角錐 ODEF の体積が 108 cm^3 のとき，三角錐 OABC から三角錐 ODEF を除いた立体の体積を求めなさい。



(2) 右の図は，底面が AB＝8 cm，BC＝6 cm の長方形で，OA＝OB＝OC＝OD＝10 cm の四角錐である。これについて，次の問いに答えなさい。

□① 四角錐 OABCD の体積を求めなさい。

□② △OAB の面積は，△OAC の面積の何倍ですか。



5 点Aを中心とする円を底面とし，高さ OA が 12 cm の円錐がある。この円錐をPとする。線分 OA 上の点Kを通り，円錐Pの底面に平行な平面で切って，円錐Pを 2 つの立体に分ける。頂点Oをふくむ方の立体をQ，ふくまない方の立体をRとする。

(1) OK＝8 cm のとき，次の問いに答えなさい。

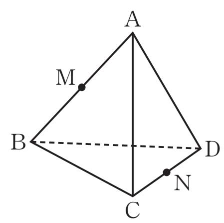
□① 円錐Pと立体Qの表面積の比を求めなさい。

□② 円錐Pの体積が 135π cm^3 のとき，立体Qの体積を求めなさい。

(2) OK＝9 cm のとき，次の問いに答えなさい。

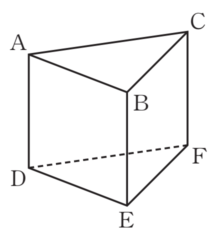
□① 円錐Pの表面積が 80π cm^2 のとき，立体Qの表面積を求めなさい。

□② 立体Rの体積が 222π cm^3 のとき，立体Qの体積を求めなさい。



6 右の図は，1 辺が 10 cm の正四面体 ABCD である。点M，Nはそれぞれ辺 AB，CD の中点である。このとき，次の線分の長さを求めなさい。

□(1) AN　　□(2) MN



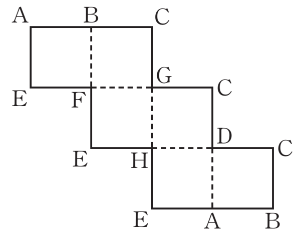
7 右の図のように，底面が正三角形，側面が正方形で，AB＝4 cm の正三角柱がある。これについて，次の問いに答えなさい。

□(1) この正三角柱の側面上に，頂点Aから辺 BE 上の点，辺 CF 上の点をそれぞれ通るようにして頂点Dまでひもをかける。最も短くなるときのひもの長さを求めなさい。

□(2) 3 点A，E，Fを頂点とする三角形の面積を求めなさい。

練習問題 1

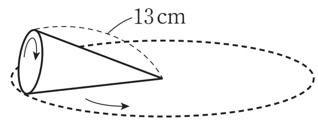
1 右の図は，立方体の展開図である。この展開図を組み立ててできる立方体について，次の問いに答えなさい。



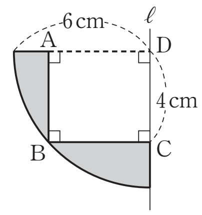
□(1) 辺 BF と平行になる辺，ねじれの位置にある辺をそれぞれ答えなさい。

□(2) 面 AEFB 上の線分 AF と平行で長さが等しくなる線分を答えなさい。

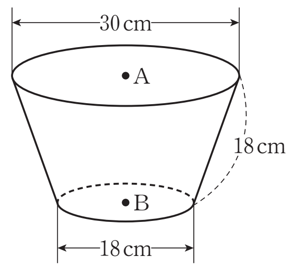
2 母線の長さが 13 cm の円錐がある。これを右の図のように，側面をすべらないように転がしたとき，ちょうどもとの位置にもどるまでに $4\frac{1}{3}$ 回転したという。このとき，円錐の表面積と体積を求めなさい。
□



3 右の図は，半径が 6 cm，中心角が 90° のおうぎ形から，DC＝4 cm の長方形 ABCD を取り除いた図形で，点Bはおうぎ形の弧上の点である。この図形を，直線 ℓ を軸として 1 回転してできる立体の表面積と体積を求めなさい。
□



4 右の図のような，円錐を底面に平行な平面で切ってできる容器がある。上の面の円の中心をA，下の面の円の中心をBとする。このとき，次の問いに答えなさい。

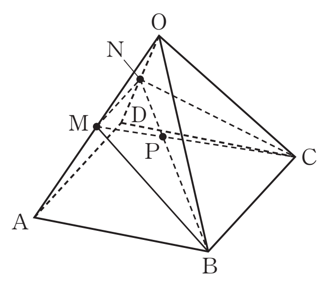


□(1) この容器の高さ AB は何 cm ですか。

□(2) この容器の容積を求めなさい。

□(3) AB の中点の位置にまで水を入れるとすると，水は何 cm^3 入りますか。ただし，水を入れたあとの水面は，上の面の円と下の面の円に平行であるとする。

5 右の図は，すべての辺が 12 cm の正四角錐で，点M，Nはそれぞれ辺 OA，OD の中点で，点Pは線分 MC と NB の交点である。次の問いに答えなさい。



□(1) この正四角錐の体積を求めなさい。

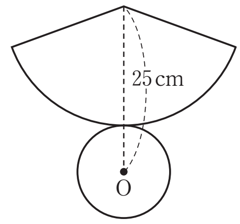
□(2) 三角錐 OMBN の体積を求めなさい。

□(3) 四角形 MBCN の面積を求めなさい。

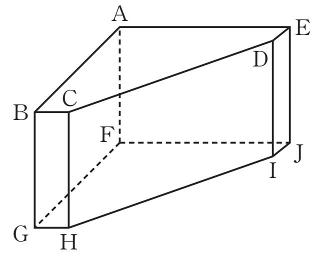
□(4) 線分 BP の長さを求めなさい。

練習問題 2

1 右の図は，高さ $5\sqrt{11}$ cm の円錐の展開図で，点Oは底面の円の中心を表す。
□この展開図を組み立ててできる円錐の表面積と体積を求めなさい。



2 右の図は，∠ABC＝∠AED＝∠BAE＝90°，AB＝AE＝10cm，BC＝DE＝2cm の五角形 ABCDE を，その平面に垂直な方向に $6\sqrt{2}$ cm 平行に移動してつくった五角柱 ABCDE–FGHIJ を表している。このとき，次の問いに答えなさい。

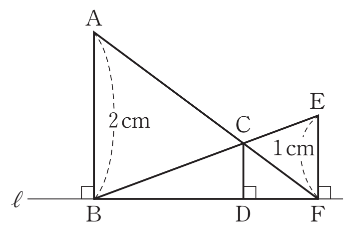


□(1) 辺 BC とねじれの位置にある辺は，全部で何本ありますか。

□(2) 4点A，F，H，Iを頂点とする三角錐の体積を求めなさい。

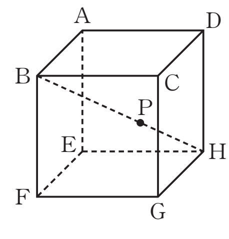
□(3) 辺 CD 上に点Kを，AK＋KH の長さが最も短くなるようにとる。このとき，AK＋KH の長さを求めなさい。

3 右の図で，線分 AB，CD，EF は，直線 ℓ に垂直である。△ABF，△CDF，△EFB，△CDB，△ABC，△EFC を，直線 ℓ を軸として1回転してできる立体の体積を，それぞれ V_1，V_2，V_3，V_4，V_5，V_6 とする。次の体積の比を，最も簡単な整数の比で表しなさい。



□(1) $V_1 : V_2$　□(2) $V_3 : V_4$　□(3) $V_2 : V_4$　□(4) $V_5 : V_6$

4 右の図は，1辺が 15cm の立方体である。点Pは対角線 BH 上にあって，BP：PH＝3：2 となる点である。このとき，次の問いに答えなさい。

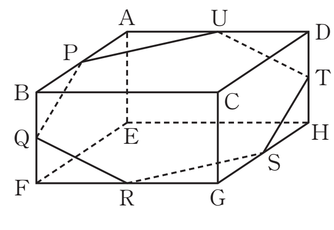


□(1) 長方形 ABGH の面積を求めなさい。

(2) 次の線分の長さを求めなさい。

□① BP　□② GP

5 右の図のように，AB＝BC＝12cm，AE＝6cm の直方体 ABCD–EFGH がある。これを辺 AB の中点P，辺 BF の中点Q，辺 FG の中点Rを通る平面で切ると，その平面は辺 GH の中点S，辺 DH の中点T，辺 AD の中点Uも通る。このとき，次の問いに答えなさい。

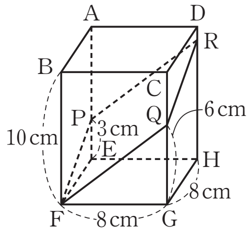


□(1) 切り口の六角形 PQRSTU の面積を求めなさい。

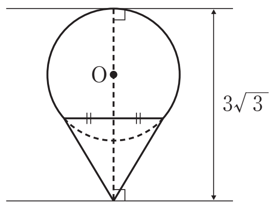
□(2) 頂点Cから六角形 PQRSTU にひいた垂線とこの六角形の交点をJとする。線分 CJ の長さを求めなさい。

実戦問題

1 右の図のように，直方体 ABCD−EFGH を 4 点 P，F，Q，R を通る平面で 2 つの立体に切り分けたとき，小さい方の立体の体積を求めなさい。　〈國學院大久我山高改〉

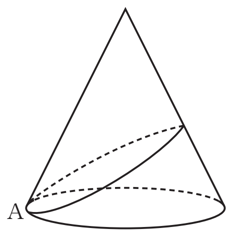


2 底面が半径 1 の円で母線の長さが 2 の円錐から，底面を取り除いた器 K がある。右の図のように，この器 K を逆さにして，その底面のふちとなる円周上のすべての点に接触するように中心 O，半径 r の球が乗った立体を P とする。この立体 P の高さが $3\sqrt{3}$ であるとき，球の半径 r の値を求めなさい。　〈中央大杉並高〉



（真横から見た図）

3 底面の直径が 4 cm で，その体積が $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}\pi\ \mathrm{cm}^3$ の円錐がある。この円錐の側面に，右の図のように点 A を始点として 1 周して点 A に戻るように糸を巻きつける。次の問いに答えなさい。　〈東京電機大高〉

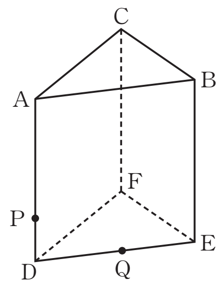


□(1)　この円錐の高さを求めなさい。

□(2)　この円錐の表面積を求めなさい。

□(3)　糸の長さが最も短くなるときの，糸の長さを求めなさい。

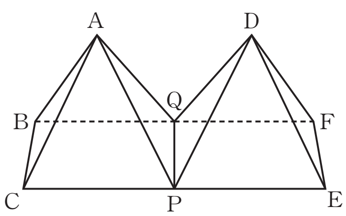
4 右の図に示した立体 ABC−DEF は，AB＝AC＝5 cm，BC＝$\sqrt{10}$ cm，AD＝6 cm で，∠BAD＝90°，∠CAD＝90° の三角柱である。点 P は辺 AD 上にあり，点 Q は辺DE 上にある。　〈東京都立日比谷高〉



□(1)　AP＝$\dfrac{1}{2}$BC のとき，3 点 P，B，C を通る平面で三角柱 ABC−DEF を切ってできる切り口の図形の面積は何 cm^2 ですか。

□(2)　2 点 C，P，2 点 P，Q，2 点 Q，F をそれぞれ結んでできる 3 つの線分 CP，PQ，QF の長さの和が最も小さくなるとき，線分 AP の長さは何 cm ですか。

5 右の図のように，すべての辺の長さが 6 の 2 つの正四角錐 ABCPQ，DQPEF を，平面上に線分 PQ で接するようにおく。点 A から底面 BCPQ に引いた垂線と底面 BCPQ の交点を H，線分 EF の中点を M とするとき，次の問いに答えなさい。　〈明治学院高〉



□(1)　線分 AH の長さを求めなさい。

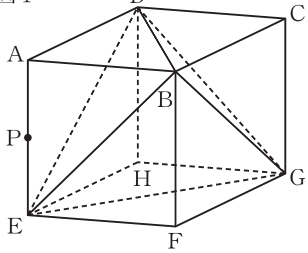
(2)　線分 AM と平面 DPQ の交点を G とするとき，

□①　AG：GM を求めなさい。　　□②　四角錐 GQPEF の体積を求めなさい。

6 右の図１に示した立体ABCD−EFGHは立方体である。点Pは辺AE上にあり，頂点A，Eとは異なる点である。また，４つの頂点B，D，E，Gをそれぞれ結び，四面体BDEGを考える。このとき，次の問いに答えなさい。

〈東京都立日比谷高〉

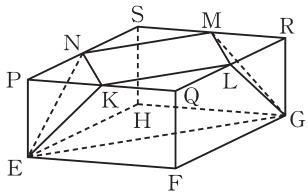
図１



□(1) 立方体ABCD−EFGHの１辺の長さをa cmとする。
四面体BDEGの体積をV cm^{3}とするとき，Vをaを用いた式で表しなさい。

(2) 立方体ABCD−EFGHの１辺の長さを6 cmとする。
図２は，図１において，点Pを通り面EFGHに平行な平面で立方体ABCD−EFGHを切った場合を示している。
立方体の切り口は正方形PQRSであり，四面体BDEGの切り口は四角形KLMNである。

図２

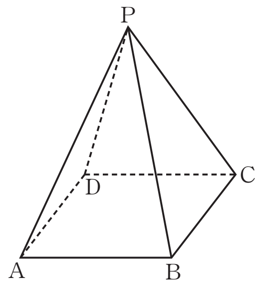


□① 線分PEの長さをx cm，△PEKの面積をy cm^{2}とする。yをxを用いた式で表しなさい。
また，台形KEFQの面積が10cm^{2}であるとき，線分PEの長さは何cmですか。

□② 辺AE上の点Pが，頂点A，Eと異なるどの位置にあっても，四角形KLMNの周の長さは常に同じ長さであることを証明しなさい。また，四角形KLMNの周の長さは何cmですか。

7 底面が１辺の長さ２の正方形である正四角錐PABCDがある。Pから底面に垂線PHを下ろし，辺BCの中点をMとする。PA＝PB＝PC＝PD＝aとして，次の問いに答えなさい。

〈青雲高〉



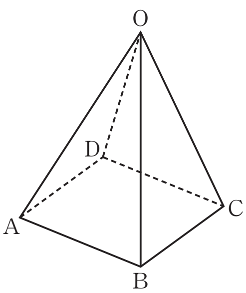
□(1) PM^2，PH^{2}をそれぞれaを用いて表しなさい。

□(2) 正四角錐PABCDの体積が$\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$であるとき，aの値を求め，さらに∠PBHの大きさを求めなさい。

□(3) (2)のとき，正四角錐PABCDの５つの面に接する球の半径を求めなさい。

8 頂角が30°である二等辺三角形を側面とする正四角錐OABCDがある。辺OB，OC，OD上にそれぞれ点P，Q，Rを，AP＋PQ＋QR＋RAが最小となるようにとるとき，次の問いに答えなさい。

〈筑波大附高〉



□(1) △OPRの面積は，△OBDの面積の何倍ですか。

□(2) 点P，Q，R，A，B，C，Dを頂点とする多面体の体積は，正四角錐OABCDの体積の何倍ですか。