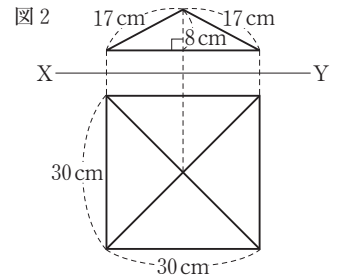
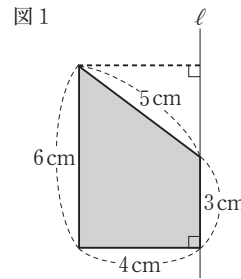


7

空間図形

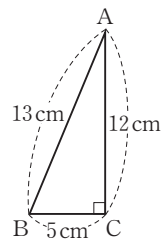
テーマ1 〈立体の表面積、体積〉

例題 □(1) 右の図1のような四角形を、直線 l を軸として1回転してできる立体の表面積と体積を求めなさい。



□(2) 右の図2の投影図で表された立体の表面積と体積を求めなさい。

1 右の図のように、 $\angle ACB=90^\circ$, $AB=13\text{cm}$, $BC=5\text{cm}$, $AC=12\text{cm}$ の $\triangle ABC$ がある。この $\triangle ABC$ を、辺 AC を軸として1回転してできる立体を P 、辺 BC を軸として1回転させてできる立体を Q とする。次の問いに答えなさい。

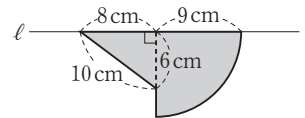


□(1) 立体 P の表面積と立体 Q の表面積とでは、どちらの方が何 cm^2 大きいですか。

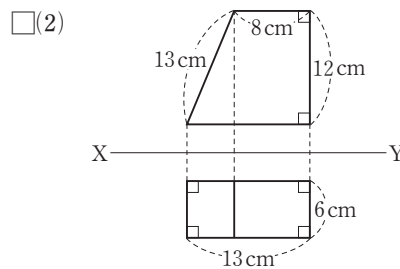
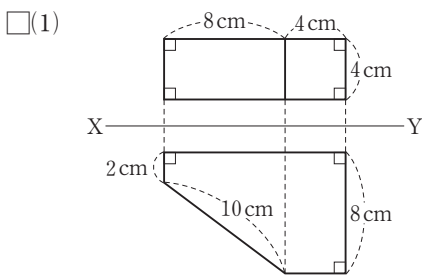
□(2) 立体 P の体積は、立体 Q の体積の何倍ですか。

2 右の図は、直角三角形と中心角が 90° のおうぎ形を組み合わせた図形である。

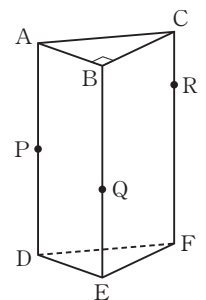
□ この図形を、直線 l を軸として1回転してできる立体の表面積と体積を求めなさい。



3 次の投影図で表された立体の表面積と体積を求めなさい。



4 右の図は、底面が直角三角形の三角柱であり、 $\angle ABC=90^\circ$, $AB=4\text{cm}$, $BC=6\text{cm}$, $AD=12\text{cm}$ である。また、点 P , Q , R はそれぞれ辺 AD , BE , CF 上の点で、 $AP=6\text{cm}$, $BQ=7\text{cm}$, $CR=3\text{cm}$ である。この立体を、次の3点を通る平面で切って2つに分けると、頂点 E をふくむ方の立体の体積を求めなさい。



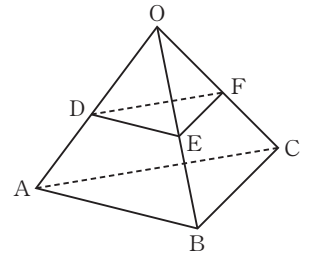
□(1) 3点 P , Q , F

□(2) 3点 A , Q , R

□(3) 3点 P , Q , R

■ テーマ2 〈相似な立体の表面積と体積，空間図形と三平方の定理〉

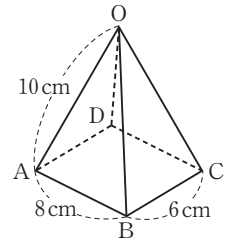
例題 (1) 右の図の三角錐 OABC において，面 DEF と面 ABC は平行で，三角錐 ODEF と三角錐 OABC の表面積の比は 9 : 25 である。このとき，次の問いに答えなさい。



□① 線分 AD の長さが 6 cm のとき，線分 OD の長さを求めなさい。

□② 三角錐 ODEF の体積が 108cm^3 のとき，三角錐 OABC から三角錐 ODEF を除いた立体の体積を求めなさい。

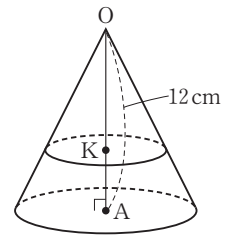
(2) 右の図は，底面が $AB=8\text{cm}$ ， $BC=6\text{cm}$ の長方形で， $OA=OB=OC=OD=10\text{cm}$ の四角錐である。これについて，次の問いに答えなさい。



□① 四角錐 OABCD の体積を求めなさい。

□② $\triangle OAB$ の面積は， $\triangle OAC$ の面積の何倍ですか。

5 点 A を中心とする円を底面とし，高さ OA が 12 cm の円錐がある。この円錐を P とする。線分 OA 上の点 K を通り，円錐 P の底面に平行な平面で切って，円錐 P を 2 つの立体に分ける。頂点 O をふくむ方の立体を Q，ふくまない方の立体を R とする。



(1) $OK=8\text{cm}$ のとき，次の問いに答えなさい。

□① 円錐 P と立体 Q の表面積の比を求めなさい。

□② 円錐 P の体積が $135\pi\text{cm}^3$ のとき，立体 Q の体積を求めなさい。

(2) $OK=9\text{cm}$ のとき，次の問いに答えなさい。

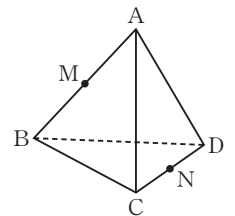
□① 円錐 P の表面積が $80\pi\text{cm}^2$ のとき，立体 Q の表面積を求めなさい。

□② 立体 R の体積が $222\pi\text{cm}^3$ のとき，立体 Q の体積を求めなさい。

6 右の図は，1 辺が 10 cm の正四面体 ABCD である。点 M，N はそれぞれ辺 AB，CD の中点である。このとき，次の線分の長さを求めなさい。

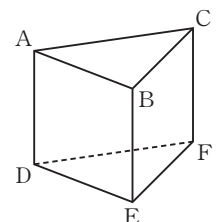
□(1) AN

□(2) MN



7 右の図のように，底面が正三角形，側面が正方形で， $AB=4\text{cm}$ の正三角柱がある。これについて，次の問いに答えなさい。

□(1) この正三角柱の側面上に，頂点 A から辺 BE 上の点，辺 CF 上の点をそれぞれ通るようにして頂点 D までひもをかける。最も短くなる時のひもの長さを求めなさい。



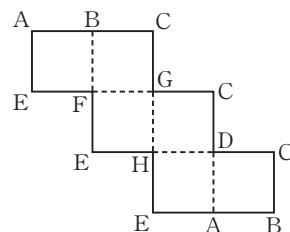
□(2) 3 点 A，E，F を頂点とする三角形の面積を求めなさい。

練習問題 1

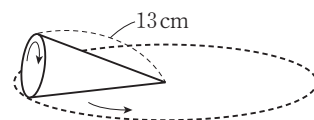
1 右の図は、立方体の展開図である。この展開図を組み立ててできる立方体について、次の問いに答えなさい。

□(1) 辺 BF と平行になる辺、ねじれの位置にある辺をそれぞれ答えなさい。

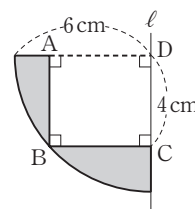
□(2) 面 AEFB 上の線分 AF と平行で長さが等しくなる線分を答えなさい。



2 母線の長さが 13cm の円錐がある。これを右の図のように、側面をすべらないように転がしたとき、ちょうどもとの位置にもどるまでに $4\frac{1}{3}$ 回転したという。このとき、円錐の表面積と体積を求めなさい。



3 右の図は、半径が 6 cm, 中心角が 90° のおうぎ形から、 $DC=4$ cm の長方形 ABCD を取り除いた図形で、点 B はおうぎ形の弧上の点である。この図形を、直線 l を軸として 1 回転してできる立体の表面積と体積を求めなさい。

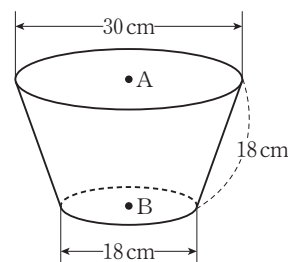


4 右の図のような、円錐を底面に平行な平面で切ることができる容器がある。上の面の円の中心を A, 下の面の円の中心を B とする。このとき、次の問いに答えなさい。

□(1) この容器の高さ AB は何 cm ですか。

□(2) この容器の容積を求めなさい。

□(3) AB の中点の位置にまで水を入れるとすると、水は何 cm^3 入りますか。ただし、水を入れたあとの水面は、上の面の円と下の面の円に平行であるとする。



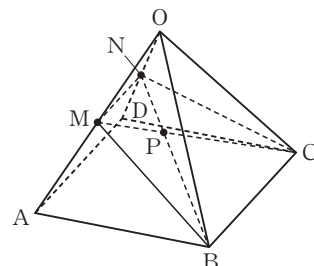
5 右の図は、すべての辺が 12 cm の正四角錐で、点 M, N はそれぞれ辺 OA, OD の中点で、点 P は線分 MC と NB の交点である。次の問いに答えなさい。

□(1) この正四角錐の体積を求めなさい。

□(2) 三角錐 OMBN の体積を求めなさい。

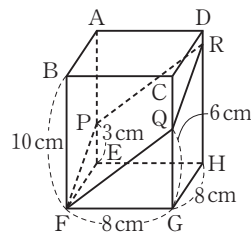
□(3) 四角形 MBCN の面積を求めなさい。

□(4) 線分 BP の長さを求めなさい。

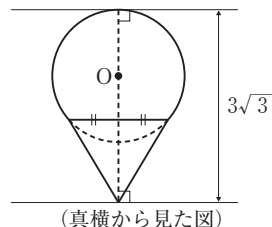


実戦問題

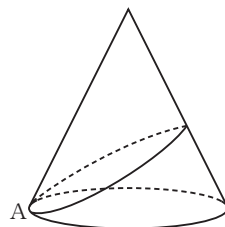
- 1** 右の図のように、直方体 ABCD-EFGH を 4 点 P, F, Q, R を通る平面で 2 つの立体に切り分けたとき、小さい方の立体の体積を求めなさい。〈國學院大久我山高改〉



- 2** 底面が半径 1 の円で母線の長さが 2 の円錐から、底面を取り除いた器 K がある。右の図のように、この器 K を逆さにして、その底面のふちとなる円周上のすべての点に接触するように中心 O, 半径 r の球が乗った立体を P とする。この立体 P の高さが $3\sqrt{3}$ であるとき、球の半径 r の値を求めなさい。〈中央大杉並高〉

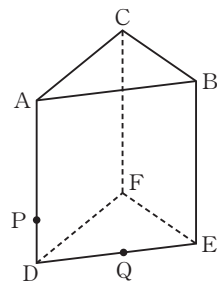


- 3** 底面の直径が 4 cm で、その体積が $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi \text{ cm}^3$ の円錐がある。この円錐の側面に、右の図のように点 A を始点として 1 周して点 A に戻るように糸を巻きつける。次の問いに答えなさい。〈東京電機大高〉



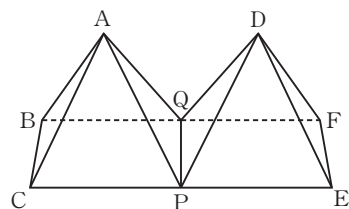
- (1) この円錐の高さを求めなさい。
- (2) この円錐の表面積を求めなさい。
- (3) 糸の長さが最も短くなるときの、糸の長さを求めなさい。

- 4** 右の図に示した立体 ABC-DEF は、 $AB=AC=5 \text{ cm}$, $BC=\sqrt{10} \text{ cm}$, $AD=6 \text{ cm}$ で、 $\angle BAD=90^\circ$, $\angle CAD=90^\circ$ の三角柱である。点 P は辺 AD 上にあり、点 Q は辺 DE 上にある。〈東京都立日比谷高〉



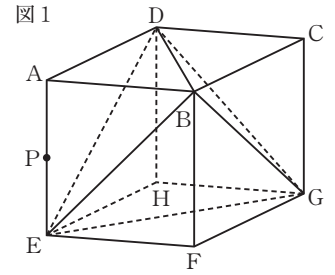
- (1) $AP=\frac{1}{2}BC$ のとき、3 点 P, B, C を通る平面で三角柱 ABC-DEF を切ることができる切り口の図形の面積は何 cm^2 ですか。
- (2) 2 点 C, P, 2 点 P, Q, 2 点 Q, F をそれぞれ結んでできる 3 つの線分 CP, PQ, QF の長さの和が最も小さくなる時、線分 AP の長さは何 cm ですか。

- 5** 右の図のように、すべての辺の長さが 6 の 2 つの正四角錐 ABCPQ, DQPEF を、平面上に線分 PQ で接するようにおく。点 A から底面 BCPQ に引いた垂線と底面 BCPQ の交点を H, 線分 EF の中点を M とするとき、次の問いに答えなさい。〈明治学院高〉



- (1) 線分 AH の長さを求めなさい。
- (2) 線分 AM と平面 DPQ の交点を G とするとき、
- ① AG : GM を求めなさい。 □② 四角錐 GQPEF の体積を求めなさい。

6 右の図1に示した立体 ABCD-EFGH は立方体である。点 P は辺 AE 上にあり、頂点 A, E とは異なる点である。また、4つの頂点 B, D, E, G をそれぞれ結び、四面体 BDEG を考える。このとき、次の問いに答えなさい。



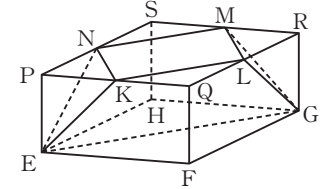
〈東京都立日比谷高〉

□(1) 立方体 ABCD-EFGH の1辺の長さを a cm とする。
四面体 BDEG の体積を V cm³ とするとき、 V を a を用いた式で表しなさい。

(2) 立方体 ABCD-EFGH の1辺の長さを 6 cm とする。

図2は、図1において、点Pを通り面 EFGH に平行な平面で立方体 ABCD-EFGH を切った場合を示している。

図2



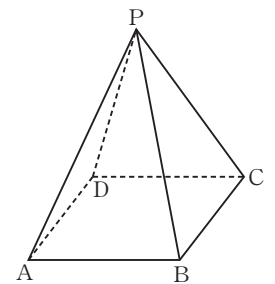
立方体の切り口は正方形 PQRS であり、四面体 BDEG の切り口は四角形 KLMN である。

□① 線分 PE の長さを x cm, $\triangle PEK$ の面積を y cm² とする。 y を x を用いた式で表しなさい。
また、台形 KEFQ の面積が 10 cm² であるとき、線分 PE の長さは何 cm ですか。

□② 辺 AE 上の点 P が、頂点 A, E と異なるどの位置にあっても、四角形 KLMN の周の長さは常に同じ長さであることを証明しなさい。また、四角形 KLMN の周の長さは何 cm ですか。

7 底面が1辺の長さ 2 の正方形である正四角錐 PABCD がある。P から底面に垂線 PH を下ろし、辺 BC の中点を M とする。PA=PB=PC=PD= a として、次の問いに答えなさい。

〈青雲高〉



□(1) PM^2 , PH^2 をそれぞれ a を用いて表しなさい。

□(2) 正四角錐 PABCD の体積が $\frac{4\sqrt{6}}{9}$ であるとき、 a の値を求め、さらに $\angle PBH$ の大きさを求めなさい。

□(3) (2) のとき、正四角錐 PABCD の5つの面に接する球の半径を求めなさい。

8 頂角が 30° である二等辺三角形を側面とする正四角錐 OABCD がある。辺 OB, OC, OD 上にそれぞれ点 P, Q, R を、 $AP+PQ+QR+RA$ が最小となるようにとるとき、次の問いに答えなさい。

〈筑波大附高〉

□(1) $\triangle OPR$ の面積は、 $\triangle OBD$ の面積の何倍ですか。

□(2) 点 P, Q, R, A, B, C, D を頂点とする多面体の体積は、正四角錐 OABCD の体積の何倍ですか。

