

11

関数(1)

要点

関数 $y=ax^2$ y が x の関数で、 $y=ax^2$ と表されているとき、 y は x の 2 乗に比例するという。

関数 $y=ax^2$ のグラフ 放物線とよばれる曲線で、原点を通り y 軸について対称である。

$a>0$ のときは上に開いた形、 $a<0$ のときは下に開いた形になる。

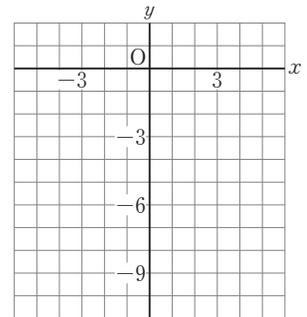
a の値の絶対値が大きいほど、グラフの開き方は小さい。

テーマ1 〈関数の式・関数のグラフ〉

例題 (1) y は x の 2 乗に比例し、 $x=4$ のとき $y=8$ である。次の問いに答えなさい。

- ① y を x の式で表しなさい。
- ② $x=-2$ のときの y の値を求めなさい。
- ③ $y=6$ となるとき x の値を求めなさい。

(2) 関数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ のグラフをかきなさい。



1 y は x の 2 乗に比例し、 $x=-6$ のとき $y=12$ である。次の問いに答えなさい。

- (1) y を x の式で表しなさい。 (2) $x=2$ のときの y の値を求めなさい。
- (3) $x=-9$ のときの y の値を求めなさい。 (4) $y=48$ となるとき x の値を求めなさい。

2 y は x の 2 乗に比例し、 $x=-\frac{1}{2}$ のとき $y=-\frac{3}{8}$ である。次の問いに答えなさい。

- (1) y を x の式で表しなさい。 (2) $x=6$ のときの y の値を求めなさい。

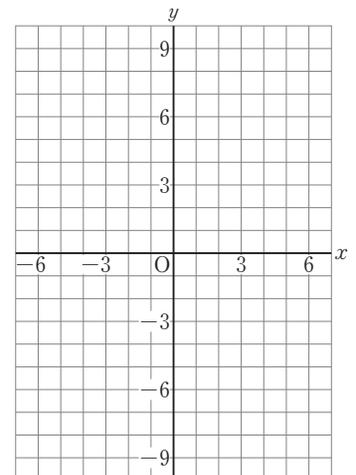
(3) y の値が次のようになるとき、 x の値を求めなさい。

- ① $y=-24$ ② $y=-42$

3 次の関数のグラフをかきなさい。

- (1) $y=2x^2$ (2) $y=\frac{1}{2}x^2$

- (3) $y=-\frac{1}{2}x^2$ (4) $y=-\frac{2}{9}x^2$



練習問題 1

1 ある斜面でボールを転がしたとき、転がり始めてから x 秒間に転がる距離を y m とすると、 x と y の関係は右の表のようになった。次の問いに答えなさい。

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
x^2	0	0.01	0.04	0.09	㉞	㉟
y	0	3	12	27	48	75

(1) 表の㉞, ㉟にあてはまる数を求めなさい。 (2) y を x の式で表しなさい。

(3) x の値が 2 倍, 3 倍, 4 倍, …になると, 対応する y の値はどのように変わりますか。

2 y は x の 2 乗に比例し, $x=4$ のとき $y=20$ である。次の問いに答えなさい。

(1) y を x の式で表しなさい。 (2) $x=-6$ のときの y の値を求めなさい。

(3) $y=5$ となるときの x の値を求めなさい。 (4) $y=22.5$ となるときの x の値を求めなさい。

3 下の関数㉠~㉤から, 次の(1)~(4)にあてはまるものをすべて答えなさい。

㉠ $y=1.5x^2$ ㉡ $y=-\frac{2}{3}x^2$ ㉢ $y=-\frac{3}{2}x^2$ ㉣ $y=0.5x^2$

(1) $x>0$ の範囲で, x が増加すると y は減少する (2) グラフが上に開いた放物線になる

(3) グラフの開き方が最も大きい (4) グラフが x 軸について対称である関数の組

4 次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y=5x^2$ について, x の変域が次のとき, y の変域を求めなさい。

① $-1 \leq x \leq 2$ ② $-4 \leq x \leq -2$ ③ $1 \leq x \leq 3$

(2) 関数 $y=ax^2$ について, x の変域が $-3 \leq x \leq 6$ のとき, y の変域は $0 \leq y \leq 12$ である。このとき, a の値を求めなさい。

5 次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ について, x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

① 3 から 5 まで ② -8 から -4 まで ③ -5 から 1 まで

(2) x の値が -3 から -1 まで増加するとき, 2 つの関数 $y=ax^2$ と $y=-3x+2$ の変化の割合は等しい。このとき, a の値を求めなさい。

練習問題 2

1 次の場合、 y を x の式で表しなさい。

□(1) x の値と y の値が右の表のように対応する。

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	0	1.2	4.8	10.8	19.2	30

□(2) 半径が x cm の球の表面積 y cm² (ただし、円周率は π とする。)

□(3) 底面が1辺 x cm の正方形で、高さが 10 cm の正四角錐の体積 y cm³

2 次の問いに答えなさい。

(1) y は x の 2 乗に比例し、 $x = -4$ のとき $y = -6$ である。

□① y を x の式で表しなさい。

□② $y = -15$ となるときの x の値を求めなさい。

(2) y は x の 2 乗に比例し、 $x = -\frac{2}{3}$ のとき $y = 8$ である。

□① y を x の式で表しなさい。

□② $x = -\frac{1}{6}$ のときの y の値を求めなさい。

3 車がブレーキをかけたとき、ブレーキがきき始めてから停止するまでに進む距離を制動距離という。制動距離は、およそ車の速さの 2 乗に比例する。ある車では、時速 60 km で走っているときの制動距離は 24 m である。次の問いに答えなさい。

□(1) 時速 x km で走っているときの制動距離を y m として、 y を x の式で表しなさい。

□(2) 時速 75 km で走っているときの制動距離を求めなさい。

□(3) 制動距離を 13.5 m 以下にするには、時速何 km 以下で走ればよいですか。

4 次の問いに答えなさい。

(1) 次の関数について、 x の変域を [] 内に示された範囲とすると、 y の変域を求めなさい。

□① $y = x^2$ [$2 \leq x \leq 3$]

□② $y = \frac{2}{3}x^2$ [$-9 \leq x \leq 6$]

□③ $y = -\frac{3}{4}x^2$ [$-4 \leq x \leq 8$]

□(2) 関数 $y = ax^2$ で、 x の変域が $-1 \leq x \leq 3$ のときの y の最小値と、 x の変域が $-6 \leq x \leq 5$ のときの y の最小値の差は 20 である。このとき、 a の値を求めなさい。

(3) 次の関数について、 x の値が [] 内に示されたように増加するときの変化の割合を求めなさい。

□① $y = 2x^2$ [1 から 5 まで]

□② $y = -\frac{2}{3}x^2$ [-2 から 5 まで]

□(4) 関数 $y = ax^2$ について、 x の値が 3 から 6 まで増加するときの変化の割合は、 x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合より 3 大きい。このとき、 a の値を求めなさい。

実戦問題

1 次の問いに答えなさい。

□(1) 2点(1, 0), (0, -1)を通る直線を ℓ , 2点(3, 0), (-1, 2)を通る直線を m とする。2直線 ℓ , m と関数 $y=ax^2$ のグラフが、1点Pで交わるとき、 a の値を求めなさい。〈筑波大附高〉

□(2) 関数 $y=ax^2$ のグラフ上に x 座標が -2 の点Pがある。点Pを x 軸の正の方向に3, y 軸の負の方向に6だけ平行に移動した点をQとすると、点Qもこの関数のグラフ上にあるとき、 a の値を求めなさい。〈筑波大附高改〉

□(3) 4点A(1, 6), B(2, 6), C(-2, 2), D(-1, 2)がある。関数 $y=ax^2$ のグラフが2つの線分AB, CD(ともに両端をふくむ)の両方に交わるとき、 a の値の範囲を求めなさい。〈明治大付明治高改〉

2 次の問いに答えなさい。

□(1) y は x の2乗に比例し、 $x=2$ のとき $y=-1$ である。この関数で、 x の変域を $-1 \leq x \leq 3$ とすると、 y の変域を求めなさい。〈広島大附高〉

□(2) a は b に比例し、 b は c^2 に比例していて、 $a=1$ のとき、 $b=-4$, $c=1$ である。 $-1 \leq c \leq 2$ のとき、 a のとり値の範囲を求めなさい。〈國學院大久我山高〉

□(3) m, n を整数とする。関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ について、 x の変域が $m \leq x \leq n$ のとき、 y の変域が $0 \leq y \leq 2$ である。 m, n の値の組は全部で何通りありますか。〈東京都立新宿高〉

□(4) 関数 $y=ax^2$ について、 x の変域が $-4 \leq x \leq 5$ のとき、 y の変域は $-10 \leq y \leq b$ であった。このとき、 a, b の値を求めなさい。〈神奈川県立多摩高〉

□(5) 2つの関数 $y=ax+\frac{8}{3}$ ($a<0$)と $y=bx^2$ ($b>0$)において、 x の変域が $-2 \leq x \leq 4$ のときの y の変域が一致するとき、 a, b の値を求めなさい。〈函館ラ・サール高〉

□(6) x の変域が $-3 \leq x \leq 2$ のとき、2つの関数 $y=ax^2$ と $y=3x+b$ の y の変域が同じであった。 a, b の値を求めなさい。〈立教新座高〉

3 次の問いに答えなさい。

□(1) 2つの関数 $y=ax^2$ と $y=8x-5$ について、 x の値が1から3まで増加するときの変化の割合が等しいとき、 a の値を求めなさい。 〈神奈川県立柏陽高〉

□(2) 関数 $y=-3x^2$ について、 x の値が a から $a+4$ まで増加するときの変化の割合は -15 である。このとき、 a の値を求めなさい。 〈桐朋高〉

□(3) 関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ について、 x の値が a から -1 まで増加するときの変化の割合と、 $a+2$ から $a+5$ まで増加するときの変化の割合が等しいとき、 a の値を求めなさい。 〈法政大高〉

□(4) x の値が $-a-1$ から 0 まで増加するとき、1次関数 $y=-5ax+1$ と関数 $y=2ax^2$ の変化の割合が等しくなった。このとき、 a の値を求めなさい。ただし、 $a>0$ とする。 〈明治大付明治高〉

□(5) 関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に2点P、Qをとる。点Pの x 座標が $-\frac{1}{2}$ 、点Qの x 座標が $\frac{3}{2}$ のとき、2点P、Qを通る直線の傾きを求めなさい。 〈東京都立戸山高改〉

□**4** 原点Oを出発し、数直線上を動く点Pを考える。点Pが動き始めてから t 秒後のOからの距離を x m とすると、 $0 \leq t \leq 4$ の範囲では $x=\frac{1}{4}t^2$ 、 $t > 4$ の範囲では $x=\frac{1}{3}t+\frac{8}{3}$ という関係がある。動き始めて t 秒後から $(t+1)$ 秒後までの平均の速さが毎秒 $\frac{4}{3}$ m となるときの t の値を求めなさい。 〈早大本庄高等学院〉

5 A駅を出発した電車が x 秒間でA駅から y m だけ走ったとすると、A駅から500m離れたB地点までは $y=\frac{1}{5}x^2$ の関係がある。一方、線路に沿って平行な道路上を3台の自動車P、Q、Rがそれぞれ定速で走っている。次の問いに答えなさい。 〈久留米大附設高〉

□(1) A駅を出発した電車は、20秒後に自動車Pに追い越されたが、40秒後には追いついた。自動車の秒速を求めなさい。また、電車がA駅を出発したとき、自動車PはA駅の手前何mの地点を走っていましたか。

□(2) A駅を出発した電車は、25秒後に自動車Qに追い越され、B地点までに追いつくことはできなかった。自動車Qの速さは秒速何mより速いといえますか。

□(3) A駅を出発した電車は、C地点で自動車Rに追い越され、B地点で追いついた。電車がA駅を出発したとき、自動車RはA駅の手前300mの地点を走っていた。C地点はA駅から何mの所にありますか。