

要点

素因数分解

整数がいくつかの自然数の積で表されるとき、そのひとつひとつの数をもとの数の因数といい、素数である因数を素因数という。

自然数を素因数の積に分解することを素因数分解という。

共通因数をくくり出す

$$ma+mb=m(a+b)$$

因数分解の公式

$$\textcircled{1} \quad x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

$$\textcircled{2} \quad x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$$

$$\textcircled{3} \quad x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$$

$$\textcircled{4} \quad x^2-a^2=(x+a)(x-a)$$

テーマ1 〈素因数分解・因数分解〉

例題 (1) 次の数を素因数分解しなさい。

$$\textcircled{1} \quad 42 \quad \left. \begin{array}{l} 2 \overline{)42} \\ 3 \overline{)21} \\ \quad 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{小さい素数から順に} \\ \text{わっていく} \end{array}$$

$$=2 \times 3 \times 7$$

$$\textcircled{2} \quad 12 \quad \left. \begin{array}{l} 2 \overline{)12} \\ 2 \overline{)6} \\ \quad 3 \end{array} \right\}$$

$$=2^2 \times 3$$

(2) 次の式を因数分解しなさい。

$$\textcircled{1} \quad 4a^2-8ab \quad \left. \begin{array}{l} \text{共通因数を} \\ \text{くくり出す} \end{array} \right\} =4a(a-2b)$$

$$\textcircled{2} \quad x^2+3x+2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{公式}\textcircled{1} \end{array} \right\} = (x+1)(x+2)$$

$$\textcircled{3} \quad x^2+6x+9 \quad \left. \begin{array}{l} \text{公式}\textcircled{2} \end{array} \right\} = (x+3)^2$$

$$\textcircled{4} \quad x^2-9 \quad \left. \begin{array}{l} \text{公式}\textcircled{4} \end{array} \right\} = (x+3)(x-3)$$

1 次の数を素因数分解しなさい。

$$\square(1) \quad 30$$

$$\square(2) \quad 150$$

$$\square(3) \quad 630$$

2 次の式を因数分解しなさい。

$$\square(1) \quad ax-bx$$

$$\square(2) \quad 3ax+6ay$$

$$\square(3) \quad a^2b-ab^2+ab$$

3 次の式を因数分解しなさい。

$$\square(1) \quad x^2+5x+6$$

$$\square(2) \quad x^2-8x+7$$

$$\square(3) \quad x^2+5x-36$$

$$\square(4) \quad x^2-7x-18$$

$$\square(5) \quad x^2+x-90$$

$$\square(6) \quad x^2-9x-36$$

4 次の式を因数分解しなさい。

$$\square(1) \quad x^2-4x+4$$

$$\square(2) \quad x^2+10x+25$$

$$\square(3) \quad x^2-8x+16$$

5 次の式を因数分解しなさい。

$$\square(1) \quad x^2-1$$

$$\square(2) \quad x^2-49$$

$$\square(3) \quad x^2-100$$

■ — テーマ2 〈いろいろな因数分解〉 — ■

例題 次の式を因数分解しなさい。

$$\begin{aligned} (1) \quad & ax^2 - 12ax + 36a \\ & = a(x^2 - 12x + 36) \\ & = a(x-6)^2 \end{aligned}$$

共通因数をくくり出す
←
公式③

$$\begin{aligned} (2) \quad & (x-1)(x+5) - (x-7) \\ & = x^2 + 4x - 5 - x + 7 \\ & = x^2 + 3x + 2 \\ & = (x+1)(x+2) \end{aligned}$$

かっこをはずし、式を整理する
←
公式①

$$\begin{aligned} (3) \quad & (x-y)^2 - (x-y) - 6 \\ & = M^2 - M - 6 \\ & = (M+2)(M-3) \\ & = (x-y+2)(x-y-3) \end{aligned}$$

$x-y=M$ とおく
←
公式①
←
 M を $x-y$ にもどす

$$\begin{aligned} (4) \quad & (3x-2y)^2 - (x+y)^2 \\ & = M^2 - N^2 \\ & = (M+N)(M-N) \\ & = \{(3x-2y) + (x+y)\} \{(3x-2y) - (x+y)\} \\ & = (4x-y)(2x-3y) \end{aligned}$$

$3x-2y=M$
 $x+y=N$ とおく
←
公式④
←
 M を $3x-2y$,
 N を $x+y$ にもどす
←
それぞれのかっこの中を計算する

6 次の式を因数分解しなさい。

□(1) $2x^2 + 12x + 16$

□(2) $ax^2 - 6ax + 9a$

□(3) $5x^2 + 10x + 5$

□(4) $xy^2 - x$

□(5) $-x^2y - 7xy + 30y$

□(6) $3x^2y - 27y$

□(7) $-2a^2b + 16ab - 32b$

□(8) $x^3y + 10x^2y + 25xy$

□(9) $x(x+2) + 3(3x+8)$

□(10) $(x+2)(x-2) - (2x-5)$

□(11) $(x-7)^2 + 2(-x+3)$

□(12) $(2x+1)(x+3) - (x-1)(x+3)$

7 次の式を因数分解しなさい。

□(1) $(a+b)x + (a+b)y$

□(2) $(x+y)^2 - (x+y)$

□(3) $(a-b)^2 + 3(a-b) - 18$

□(4) $(x-y)^2 + 4(x-y) + 4$

□(5) $(a-b)^2 - 16(a-b) + 64$

□(6) $(x+y)^2 - 81$

□(7) $(a-b)^2 + (a-b) - 12$

□(8) $(x-2y)^2 - 6(x-2y) + 9$

□(9) $(a+3b)^2 + 18(a+3b) + 81$

□(10) $x^2 - (y-z)^2$

□(11) $(a-5)^2 - 3(a-5) - 28$

□(12) $(2x+3)^2 - 12(2x+3) + 36$

□(13) $(3x-2)^2 + 14(3x-2) + 49$

□(14) $(a+b)^2 - (c+d)^2$

□(15) $(5x-1)^2 - (3x+4)^2$

練 習 問 題 1

1 792にできるだけ小さい自然数をかけて、その結果をある自然数の平方にしたい。どんな数をかければよいですか。

2 次の式を因数分解しなさい。

□(1) $12ax^2 - 9bx^2 + 15cx^2$

□(2) $-2a^2b + 8ab^2 + 6ab$

□(3) $-15x^2yz + 6xy^2z - 3xyz^2$

3 次の式を因数分解しなさい。

□(1) $x^2 + 8x - 48$

□(2) $a^2 - 14a - 32$

□(3) $x^2 + 7xy + 10y^2$

□(4) $-10b^2 - 9ab + a^2$

□(5) $x^2 + x + \frac{2}{9}$

□(6) $x^2 - 2x - \frac{5}{4}$

4 次の式を因数分解しなさい。

□(1) $a^2 + 30ab + 225b^2$

□(2) $-22x + 121 + x^2$

□(3) $9x^2 + 12x + 4$

□(4) $16a^2 - 8a + 1$

□(5) $x^2 + 3x + \frac{9}{4}$

□(6) $a^2 - \frac{1}{3}a + \frac{1}{36}$

5 次の式を因数分解しなさい。

□(1) $25x^2 - 4$

□(2) $16x^2 - 9y^2$

□(3) $\frac{1}{49}a^2 - \frac{9}{4}b^2$

6 次の式の値を求めなさい。

□(1) $x=91$ のとき、 $x^2 - 81$ の値

□(2) $x=1$, $y=-\frac{1}{5}$ のとき、 $x^2 - 10xy + 25y^2$ の値

7 次の式を因数分解しなさい。

□(1) $8ab^2 - 2a^3$

□(2) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 5$

□(3) $3(x-1)(x+2) - (2x+5)(x-1)$

8 次の式を因数分解しなさい。

□(1) $(a+3)^2 + 4(a+3) - 45$

□(2) $y(x-1) - x + 1$

□(3) $(x-y)^2 - 6(y-x) + 9$

練 習 問 題 2

1 1400をできるだけ小さい自然数でわって、その結果をある自然数の平方にしたい。どんな数でわればよいで
□₁すか。

2 次の式を因数分解しなさい。

□(1) $8a^2x+12a^2y-24a^2z$

□(2) $-14xy^2-28x^2y+35xy$

□(3) $-12a^2bc+30ab^2c-18abc^2$

3 次の式を因数分解しなさい。

□(1) $a^2-12a-28$

□(2) $x^2+18x+45$

□(3) $a^2+5ab-6b^2$

□(4) $16y^2-10xy+x^2$

□(5) $x^2-3x-\frac{7}{4}$

□(6) $a^2+ab+\frac{3}{16}b^2$

4 次の式を因数分解しなさい。

□(1) $x^2-24xy+144y^2$

□(2) $100+a^2+20a$

□(3) $4x^2-4x+1$

□(4) $25a^2+20ab+4b^2$

□(5) $x^2-\frac{2}{7}x+\frac{1}{49}$

□(6) $x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}$

5 次の式を因数分解しなさい。

□(1) $9-x^2$

□(2) $4x^2-49y^2$

□(3) $\frac{a^2}{25}-\frac{9}{16}b^2$

6 次の式の値を求めなさい。

□(1) $a=18, b=19$ のとき, a^2-b^2 の値

□(2) $a=\frac{1}{2}, b=1$ のとき, $4a^2-4ab+b^2$ の値

7 次の式を因数分解しなさい。

□(1) $3x^3+9x^2-12x$

□(2) $\frac{1}{2}a^2+5a+\frac{21}{2}$

□(3) $5(x+1)(x-3)-(4x-3)(x+1)$

8 次の式を因数分解しなさい。

□(1) $(x-4y)^2-2(x-4y)-15$

□(2) $(a-b)^2-2a+2b-8$

□(3) $(a-b)(a+c)+2c(b-a)$

実 戦 問 題

1 次の問いに答えなさい。

- (1) 次の□⑦, □④に入れるのに適している自然数をそれぞれ書きなさい。 〈大阪〉
 392を素因数分解すると $392 = \square{\text{⑦}}^3 \times \square{\text{④}}^2$ となる。
- (2) 84に、できるだけ小さい自然数 n をかけて、その結果が、ある自然数の2乗になるようにしたい。 n を求めなさい。 〈山形〉
- (3) 2000にできるだけ小さな正の整数 n をかけて、ある整数の3乗になるようにしたい。 n の値を求めなさい。
〈大阪教育大附高(平野)〉
- (4) 864は自然数 n で割り切れて、その商がある自然数の2乗になる。このときの最小の n の値を求めなさい。
〈城北埼玉高〉
- (5) a, b はともに正の整数で、 $a < b$ である。 a と b の積が500で、最小公倍数が100であるとき、 a, b の組をすべて求めよ。
〈洛南高〉

2 次の式を因数分解しなさい。

- (1) $x^2 + 2x - 15$ 〈北海道〉 □(2) $x^2 + 10x + 25$ 〈岩手〉
- (3) $t^2 + 5t - 6$ 〈鳥取〉 □(4) $a^2b - bc^2$ 〈東京電機大高〉
- (5) $x^2 - x - 30$ 〈大阪〉 □(6) $2x^2 - 16xy + 32y^2$ 〈香川〉
- (7) $2x^2y + 6xy - 8y$ 〈東京都立新宿高〉 □(8) $x^2 - 7x + 6$ 〈沖縄〉
- (9) $x^3 - x^2 - 6x$ 〈日本大豊山高〉 □(10) $a^2 - 16$ 〈宮城〉
- (11) $x^2 + 4x - 12$ 〈茨城〉 □(12) $2xy^2 - 8xy - 64x$ 〈東京都立青山高〉
- (13) $x^2y + 4xy - 21y$ 〈京都〉 □(14) $48a^3b - 120a^2b^2 + 75ab^3$ 〈函館ラ・サール高〉

