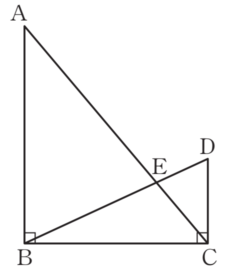
21 相似な図形(2)

例題1 相似な三角形の面積比と辺の比

図において，AB＝5cm，BC＝4cm，CD＝2cm，∠ABC＝∠BCD＝90°である。△BCEの面積を求めよ。〈茨城〉



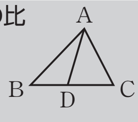
解説

AB//DCだから，
AE：CE＝AB：CD＝5：2
ここで，△ABCの面積は，
$\frac{1}{2}\times4\times5=10$(cm²)
△BAEと△BCEで，底辺をそれぞれAE，CEとすると，高さは等しいから，
△BAE：△BCE＝AE：CE＝5：2

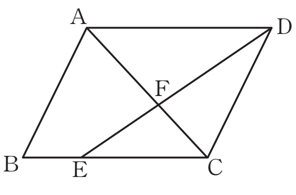
よって，△BCE＝$\frac{2}{5+2}$△ABC
＝$\frac{2}{7}\times10$
＝$\frac{20}{7}$(cm²)　　**答 $\frac{20}{7}$cm²**

BE：DE＝5：2であることから，△DBCで考えて求めてもよい。

三角形の面積比と辺の比
△ABD：△ADC
＝BD：DC



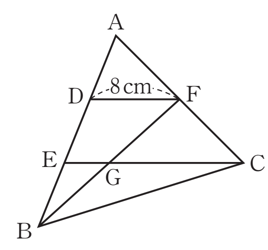
1 図で，四角形ABCDは平行四辺形である。Eは辺BC上の点で，BE＝$\frac{1}{3}$BCである。△DECの面積が25cm²のとき，△FECの面積を求めよ。



＿＿＿＿＿＿＿＿

例題2 中点連結定理

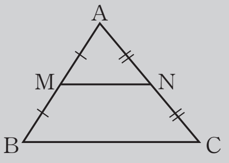
図のように，△ABCがあり，辺ABを3等分する点をそれぞれD，Eとし，辺ACの中点をFとする。また，線分BFと線分CEの交点をGとする。DF＝8cmのとき，線分CGの長さは何cmか。〈長崎〉



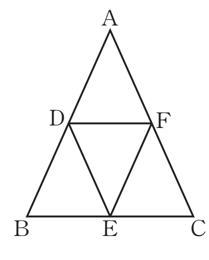
解説

△AECで，Dは線分AEの中点，Fは辺ACの中点だから，中点連結定理より，
DF//EC，DF＝$\frac{1}{2}$EC
したがって，EC＝2DF＝2×8＝16(cm)
△BDFで，Eは線分BDの中点，DF//EGだから，Gは線分BFの中点となる。
中点連結定理より，EG＝$\frac{1}{2}$DF＝$\frac{1}{2}\times8=4$(cm)
よって，CG＝EC－EG＝16－4＝12(cm)　　**答 12cm**

中点連結定理
AM＝MB，AN＝NC
のとき，
MN//BC，MN＝$\frac{1}{2}$BC



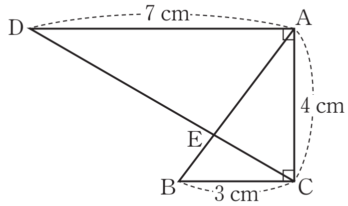
2 図の△ABCは，AB＝ACの二等辺三角形である。辺AB，BC，CAの中点をそれぞれD，E，Fとする。AB＝14cm，DF＝6cmのとき，線分DE，BCの長さをそれぞれ求めよ。



線分DE＿＿＿＿＿＿＿＿　線分BC＿＿＿＿＿＿＿＿

練習問題

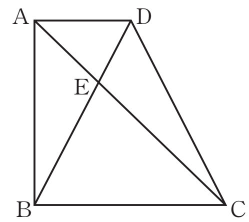
1 (1) 図のように，AC＝ 4 cmで，∠ACB＝90°，BC＝ 3 cmの直角三角形ABCと∠DAC＝90°，AD＝ 7 cmの直角三角形ACDがある。また，ABとCDの交点をEとする。〈佐賀〉



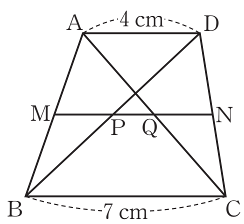
① AE：EBの比を求めよ。

② △ACEの面積を求めよ。

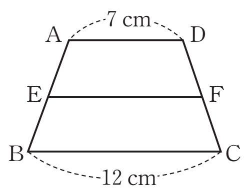
(2) 図で，四角形ABCDはAD//BC，∠ABC＝90°の台形で，Eは線分ACとDBとの交点である。AB＝BC＝ 6 cm, AD＝ 3 cmのとき, △EBCの面積は何cm^2か。〈愛知〉



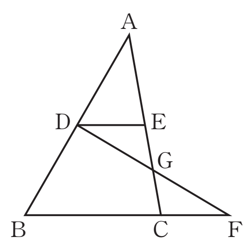
2 (1) 図のように，AD//BCである台形ABCDがある。辺ABの中点Mを通り辺BCに平行な直線と辺CDとの交点をNとし，線分MNと線分BDとの交点をP，線分MNと線分ACとの交点をQとするとき，線分PQの長さを求めよ。〈山口〉



(2) 図において，四角形ABCDはAD//BCの台形であり，Eは辺ABの中点である。点Eを通り辺ADに平行な直線と辺DCとの交点をFとする。AD＝ 7 cm, BC＝12 cmのとき，EFの長さを求めよ。〈島根改〉

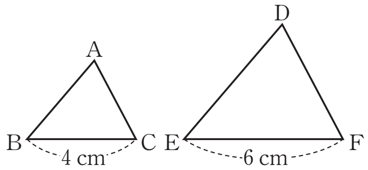


(3) 図のように，△ABCの辺AB, ACの中点をそれぞれD, Eとする。また，辺BCの延長にBC：CF＝2：1となるように点Fをとり，ACとDFの交点をGとする。このとき，△DGE≡△FGCであることを証明せよ。〈栃木〉



例題3 相似な図形の面積比

(1) 図で，△ABC∽△DEFであるとき，△ABCと△DEFの面積比を，最も簡単な整数の比で表せ。 〈福島〉



(2) 相似な２つの四角形P，Qがあって，PとQの相似比は1：2である。Pの面積が５cm^2のとき，Qの面積は何cm^2か。

解説

(1) △ABCと△DEFの相似比は，4：6＝2：3
よって，面積比は，2^2：3^2＝4：9

相似な平面図形で，相似比がm：nならば，面積比はm^2：n^2

答 **4：9**

(2) PとQの相似比が1：2だから，
面積比は，1^2：2^2＝1：4
Qの面積をS cm^2とすると，
5：S＝1：4
S＝20

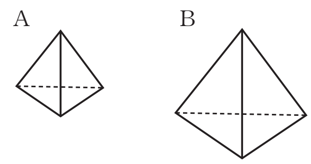
答 **20 cm^2**

3 (1) １辺の長さが５cmの正三角形ABCと，１辺の長さが３cmの正三角形DEFがある。正三角形ABCと正三角形DEFの面積比を，最も簡単な整数の比で表せ。

(2) 相似な２つの五角形P，Qがあり，PとQの相似比は3：4である。Qの面積が80cm^2のとき，Pの面積を求めよ。

例題4 相似な立体の体積比

図の２つの三角錐A，Bは相似で，その相似比は2：3である。三角錐Aの体積が160cm^3のとき，三角錐Bの体積を求めよ。 〈山口〉



解説

三角錐AとBの相似比が2：3だから，体積比は，2^3：3^3＝8：27
三角錐Bの体積をV cm^3とすると，160：V＝8：27
8V＝160×27
V＝540

相似な立体で，相似比がm：nならば，体積比はm^3：n^3

答 **540 cm^3**

4 (1) 相似な２つの立体PとQの相似比が2：1のとき，立体PとQの表面積の比と体積比を，それぞれ最も簡単な整数の比で表せ。

表面積の比＿＿＿＿＿＿　体積比＿＿＿＿＿＿

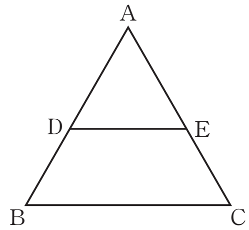
(2) 相似な２つの直方体A，Bがあり，AとBの相似比は5：4である。Bの体積が128cm^3のとき，Aの体積を求めよ。

練習問題

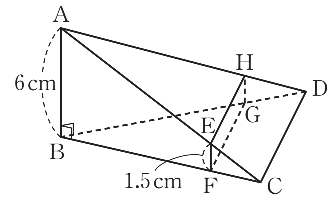
3 (1) 相似な２つの三角形ＰとＱの相似比が6：5のとき，次のものを求めよ。

① 三角形ＰとＱの周の長さの比　　② 三角形ＰとＱの面積比

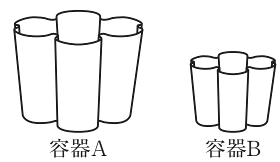
(2) 図の△ABCは正三角形で，D，Eはそれぞれ辺AB，AC上の点である。DE//BC，AD：DB＝4：3で，△ABCの面積が196 cm^2のとき，四角形DBCEの面積を求めよ。



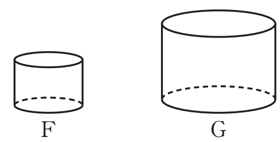
(3) 図のように，点A，B，C，Dを頂点とし，AB＝6 cm，∠ABC＝∠ABD＝90°の三角錐がある。辺AC，BC，BD，AD上にEF＝1.5 cmの長方形となる点E，F，G，Hをそれぞれとる。このとき，△BFGと四角形FCDGの面積の比を，最も簡単な整数の比で表せ。〈三重〉



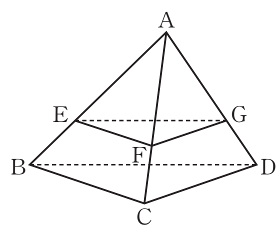
4 (1) 図の２つの容器A，Bは相似な立体であり，相似比は3：2である。容器Aに入る水の体積が162 cm^3であるとき，容器Bに入る水の体積を求めよ。〈静岡〉



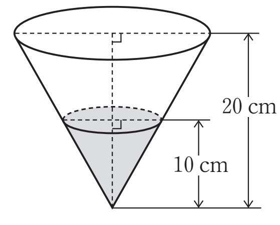
(2) 相似な２つの立体F，Gがある。FとGの相似比が3：5であり，Fの体積が81π cm^3のとき，Gの体積を求めよ。〈佐賀〉



(3) 図のように，三角錐ABCDがあり，辺AB，AC，AD上にそれぞれ点E，F，Gを，AE：EB＝AF：FC＝AG：GD＝2：1となるようにとる。三角錐AEFGと三角錐ABCDの体積比を求めよ。〈富山〉

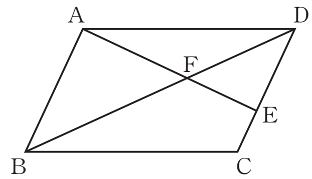


(4) 深さが20 cmの円錐の形をした容器がある。この容器に100 cm^3の水を入れたところ，図のように水面の高さが10 cmになった。あと何cm^3の水を入れると，この容器はいっぱいになるか。〈和歌山〉

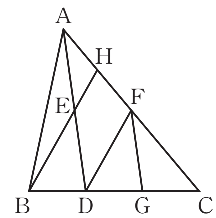


実戦問題

1 図のように，平行四辺形ABCDがある。点Eは辺CD上にあり，CE：ED＝1：2である。線分AEと線分BDの交点をFとする。このとき，△DFEの面積は，平行四辺形ABCDの面積の何倍か，求めよ。〈秋田〉



2 図のように，△ABCがあり，辺BC上にBD：DC＝1：2となる点Dをとり，線分ADの中点をE，辺ACの中点をFとする。点Fを通り，線分ADと平行な直線をひき，辺BCとの交点をGとする。直線BEと辺ACの交点をHとする。〈三重〉

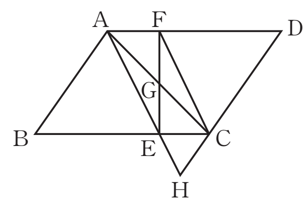


(1) △BDE≡△DGFであることを証明せよ。

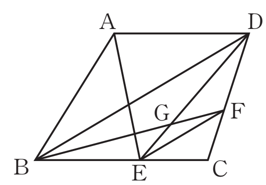
(2) 線分BEと線分EHの長さの比を，最も簡単な整数の比で表せ。

(3) △ABCと△DGFの面積の比を，最も簡単な整数の比で表せ。

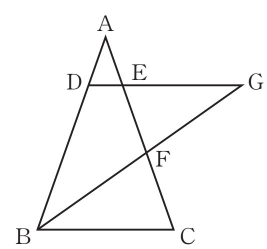
3 図のように，平行四辺形ABCDがあり，辺BC上に点Eを，BE：EC＝5：2となるようにとる。また，辺AD上に点Fを∠AEF＝∠CFEとなるようにとる。線分ACと線分EFとの交点をG，直線AEと直線CDとの交点をHとするとき，四角形CGEHと平行四辺形ABCDの面積の比を最も簡単な整数の比で表せ。〈京都〉



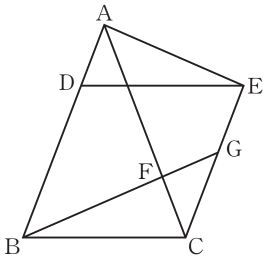
4 図のように，AD//BCの台形ABCDがある。辺BC上に点E，辺CD上に点Fを，BD//EFとなるようにとる。また，線分BFと線分EDとの交点をGとする。BG：GF＝5：2となるとき，△ABEの面積Sと△GEFの面積Tの比を最も簡単な整数の比で表せ。〈広島〉



5 図で，△ABCはAB＝ACの二等辺三角形であり，D，Eはそれぞれ辺AB，AC上の点で，DE//BCである。また，F，Gはそれぞれ∠ABCの二等分線と辺AC，直線DEとの交点である。AB＝12cm，BC＝8cm，DE＝2cmのとき，△FBCの面積は△ADEの面積の何倍か，求めよ。〈愛知〉

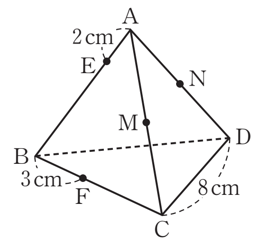


6 図のように，AB＝AC，AB＞BCの二等辺三角形ABCがある。この二等辺三角形の辺AB上にBC＝BDとなる点Dをとり，線分BDを１辺とするひし形BCEDをつくる。辺AC上にAD＝CFとなる点Fをとり，点Bと点F，点Aと点Eをそれぞれ結ぶ。線分BFを点Fの方向へ延長し，線分CEとの交点をGとする。
AB＝7 cm，BC＝5 cmのとき，ひし形BCEDの面積は，三角形CGFの面積の何倍か，求めよ。 〈高知〉



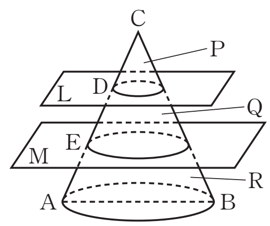
7 図のような１辺の長さが８cmの正四面体ABCDがあり，辺AC，ADの中点をそれぞれM，Nとする。また，辺AB上にAE＝2 cmとなるような点Eをとり，辺BC上にBF＝3 cmとなるような点Fをとる。 〈新潟〉

⑴ 線分MNの長さを求めよ。



⑵ ５点F，C，D，N，Mを結んでできる四角錐の体積は，三角錐EAMNの体積の何倍か，求めよ。

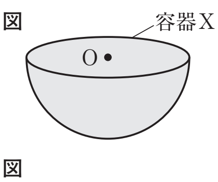
8 図のように，線分ABを直径とする円を底面とし，点Cを頂点とする円錐がある。この円錐の母線CA上にCD＝DE＝EAとなる点D，Eをとり，この円錐の底面と平行で点D，Eを通る平面をそれぞれ平面L，平面Mとする。平面Lと平面Mで分けられた円錐の３つの部分を頂点に近い方からP，Q，Rとする。Qの体積が28 cm^3のとき，Rの体積を求めよ。 〈三重〉



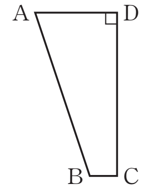
9 点Oを中心とする球を，点Oを通る平面で切ってできる半球の形をした容器Xがあり，右のⅠ図のように，切り口を水平に保って満水にしてある。この切り口を円Oとすると，円Oの周の長さは12π cmであった。また，右のⅡ図のように，AD//BCの台形ABCDがあり，AD：BC＝3：1，CD＝12 cm，∠ADC＝90°である。台形ABCDを，直線CDを回転の軸として１回転させてできる立体の形をした容器Yがあり，空の容器Yを，BCを半径とする円Cが底になるように水平な台の上に置く。右のⅢ図のように，容器Yに，容器Xに入っている水を残らず注ぐと，容器の底から水面までの高さは９cmになった。Ⅲ図において，水面と線分AB，線分CDとの交点をそれぞれE，Fとする。ただし，容器Xと容器Yの厚さは考えないものとする。 〈京都〉

⑴ AD：EFを最も簡単な整数の比で表せ。

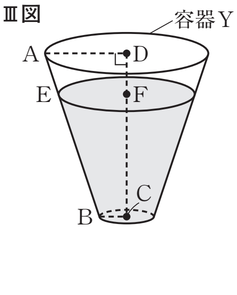
Ⅰ図



Ⅱ図



Ⅲ図



⑵ 容器Yの容積を求めよ。