

11

変域と変化の割合

テーマ 5 関数 $y=ax^2$ と変域

練習>>p.104①

x の変域に0がふくまれるときは、 y の最小値または最大値は0である。

例題 関数 $y=x^2$ について、 x の変域が $-2 \leq x \leq 3$ のとき、 y の変域を求めよ。

解説 関数 $y=x^2$ のグラフで、 $-2 \leq x \leq 3$ に対応する部分は、図の実線部分になる。

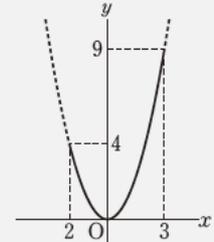
グラフから、 x の値が増加するとき、 $-2 \leq x \leq 0$ では、 y の値は4から0まで減少し、

$0 \leq x \leq 3$ では、 y の値は0から9まで増加する。

よって、 y は、 $x=0$ のとき最小値0、 $x=3$ のとき最大値9をとる。

したがって、求める y の変域は、 $0 \leq y \leq 9$

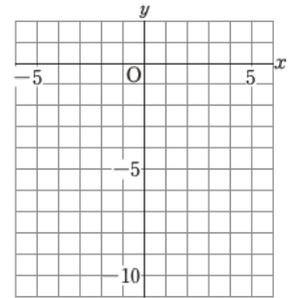
解答 $0 \leq y \leq 9$



1 関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ について、 x の変域が $-4 \leq x \leq 2$ のとき、次の問いに答えよ。

(1) この関数のグラフをかけ。

(2) y の変域を求めよ。



2 (1) 関数 $y=2x^2$ について、 x の変域が次のとき、 y の変域を求めよ。

- ① $-1 \leq x \leq 4$ ② $-3 \leq x \leq -1$ ③ $2 \leq x \leq 5$

(2) 関数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ について、 x の変域が次のとき、 y の変域を求めよ。

- ① $-4 \leq x \leq 3$ ② $-6 \leq x \leq -2$ ③ $4 \leq x \leq 8$

3 関数 $y=ax^2$ について、 x の変域が $-2 \leq x \leq 3$ のとき、 y の変域は $0 \leq y \leq 3$ である。

a の値を求めよ。

4 関数 $y=\frac{2}{3}x^2$ について、 x の変域が $-3 \leq x \leq a$ のとき、 y の変域は $0 \leq y \leq 24$ である。

a の値を求めよ。

関数 $y=ax^2$ について、 x の値が p から q まで増加するときの変化の割合は、

$$(\text{変化の割合}) = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{aq^2 - ap^2}{q - p} = \frac{a(q^2 - p^2)}{q - p} = \frac{a(q + p)(q - p)}{q - p} = a(p + q)$$

例題 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ について、 x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

(1) 2 から 4 まで

(2) -3 から -1 まで

解説 (変化の割合) $= a(p + q)$ に代入する。

(1) $a = \frac{1}{2}$, $p = 2$, $q = 4$ を代入すると、

変化の割合は、 $\frac{1}{2} \times (2 + 4) = 3$ ←

(2) $a = \frac{1}{2}$, $p = -3$, $q = -1$ を代入すると、

変化の割合は、 $\frac{1}{2} \times \{(-3) + (-1)\} = -2$ ←

関数 $y = ax^2$ の変化の割合は一定ではない

解答 (1) 3 (2) -2

1 関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ について、 x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

(1) 4 から 5 まで

(2) -6 から -3 まで

2 (1) 関数 $y = 2x^2$ について、 x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

① 1 から 3 まで

② -4 から -2 まで

③ -3 から 1 まで

(2) 関数 $y = 4x^2$ について、 x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

① 2 から 3 まで

② -4 から 0 まで

③ -2 から 5 まで

(3) 関数 $y = -2x^2$ について、 x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

① -3 から -1 まで

② -2 から 4 まで

③ $\frac{1}{2}$ から $\frac{5}{2}$ まで

(4) 関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ について、 x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

① 2 から 6 まで

② -5 から -3 まで

③ -4 から 2 まで

(5) 関数 $y = \frac{3}{4}x^2$ について、 x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

① 1 から 3 まで

② -6 から -2 まで

③ -3 から 1 まで

例題 関数 $y=ax^2$ について、 x の値が -4 から -1 まで増加するときの変化の割合は 5 である。
 a の値を求めよ。

解説 x の値が -4 から -1 まで増加するときの変化の割合を、 a の式で表すと、
 $a \times \{(-4) + (-1)\} = -5a$ ←(変化の割合) $= a(p+q)$ の公式に代入する
 これが 5 と等しいから、 $-5a = 5$ $a = -1$

解答 $a = -1$

1 (1) 関数 $y=ax^2$ について、 x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合は 12 である。
 a の値を求めよ。

(2) 関数 $y=ax^2$ について、 x の値が -5 から -3 まで増加するときの変化の割合は 4 である。
 a の値を求めよ。

2 (1) x の値が -3 から 1 まで増加するとき、2つの関数 $y=3x^2$ と $y=ax+1$ の変化の割合は等しい。
 a の値を求めよ。

(2) x の値が -1 から 3 まで増加するとき、2つの関数 $y=ax^2$ と $y=-6x+5$ の変化の割合は等しい。
 a の値を求めよ。

3 (1) 関数 $y=-2x^2$ について、 x の値が p から $p+1$ まで増加するときの変化の割合は -4 である。
 p の値を求めよ。

(2) 関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ について、 x の値が p から $p+2$ まで増加するときの変化の割合は -3 である。
 p の値を求めよ。

$$(\text{平均の速さ}) = \frac{(\text{進んだ距離})}{(\text{かかった時間})}$$

例題 ある斜面でボールを転がしたとき、転がり始めてから x 秒間に転がる距離を y m とすると、 $y = 2x^2$ という関係が成り立つ。次の場合の平均の速さを求めよ。

- (1) 転がり始めて2秒後から3秒後までの間 (2) 転がり始めて4秒後から5秒後までの間

解説 かかった時間は x の増加量、進んだ距離は y の増加量になっているから、「平均の速さを求める」ことは「変化の割合を求める」と同じである。

(1) 変化の割合は、 $\frac{2 \times (2+3)}{2} = 10 \rightarrow$ 平均の速さは 10m/秒
(変化の割合) = $a(b+q)$ の公式に代入する

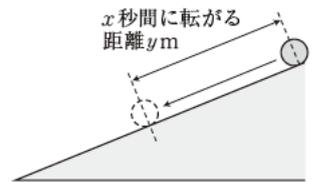
(2) 変化の割合は、 $2 \times (4+5) = 18 \rightarrow$ 平均の速さは 18m/秒

解答 (1) 10m/秒 (2) 18m/秒

1 ある斜面でボールを転がしたとき、転がり始めてから x 秒間に転がる距離を y m とすると、 $y = \frac{4}{3}x^2$ という関係が成り立つ。次の場合の平均の速さを求めよ。

- (1) 転がり始めてから3秒後までの間 (2) 転がり始めて5秒後から7秒後までの間

2 ボールが図の斜面を転がるとき、転がり始めてから x 秒間に転がる距離を y m とすると、 y は x の2乗に比例し、転がり始めてから2秒間に転がる距離は3mである。



- (1) y を x の式で表せ。

(2) 転がり始めてからの時間が次の場合の平均の速さを求めよ。

- ① 0.9秒後から1.1秒後までの間 ② 2.8秒後から3.2秒後までの間

3 物を落とすとき、落ち始めてから x 秒間に落ちる距離を y m とすると、 y は x の2乗に比例し、落ち始めてから3秒間に落ちる距離は44.1mである。

- (1) y を x の式で表せ。

(2) 落ち始めてからの時間が次の場合の平均の速さを求めよ。

- ① 1.4秒後から1.6秒後までの間 ② 4.7秒後から5.3秒後までの間

テーマ 9 放物線上の2点を通る直線の式

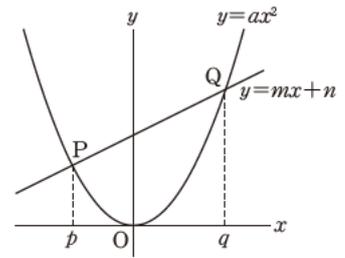
図のように、放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=mx+n$ が2点 P, Q で交わっており、
 P, Q の x 座標をそれぞれ p, q とすると、

直線の傾き $\cdots m = a(p+q) \leftarrow a \times (2 \text{点の} x \text{座標の和})$

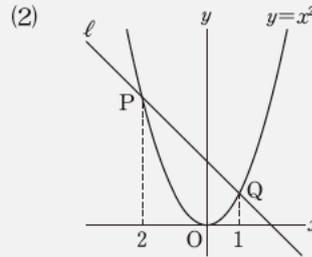
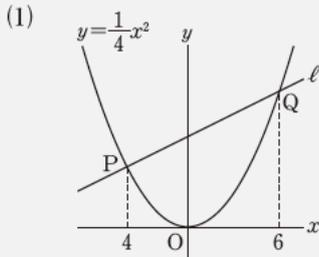
直線の切片 $\cdots n = -apq \leftarrow -1 \times a \times (2 \text{点の} x \text{座標の積})$

で求めることができる。

直線の傾きは、変化の割合と同じである。



例題 次の図で、直線 ℓ の式を求めよ。



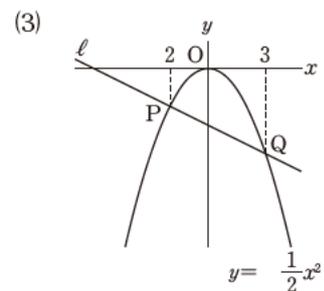
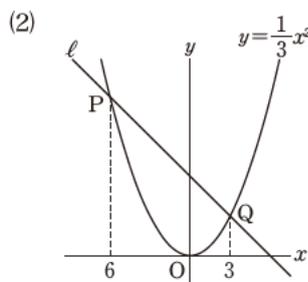
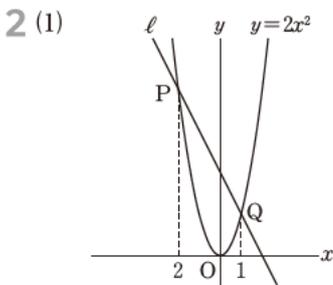
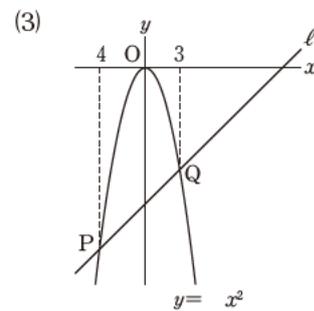
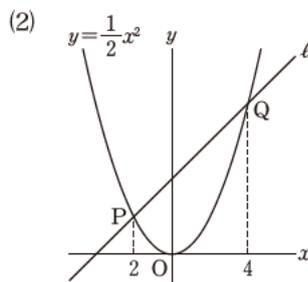
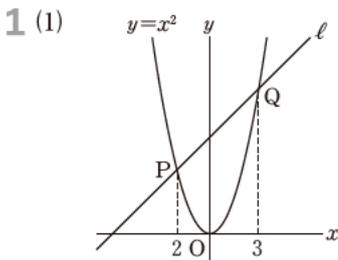
解説 直線 ℓ の式を $y=mx+n$ とする。

(1) $m = \frac{1}{4} \times \{(-4) + 6\} = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{1}{4} \times (-4) \times 6 = 6$ よって、 $y = \frac{1}{2}x + 6$

(2) $m = 1 \times \{(-2) + 1\} = -1$, $n = -1 \times (-2) \times 1 = 2$ よって、 $y = -x + 2$

解答 (1) $y = \frac{1}{2}x + 6$ (2) $y = -x + 2$

次の図で、直線 ℓ の式を求めよ。

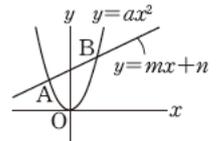


テーマ 10 放物線と直線の交点

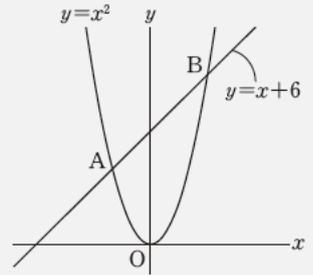
»p.104⁵

放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=mx+n$ の交点 A, B の座標は、

連立方程式 $\begin{cases} y=ax^2 \\ y=mx+n \end{cases}$ の解として求めることができる。



例題 図のように、放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+6$ の交点を A, B とするとき、
2点 A, B の座標を求めよ。



解説 連立方程式 $\begin{cases} y=x^2 & \cdots\text{①} \\ y=x+6 & \cdots\text{②} \end{cases}$

①, ② から y を消去すると、 $x^2=x+6$ 整理して、 $x^2-x-6=0$

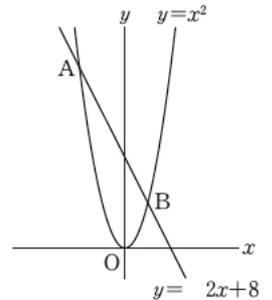
これを解くと、 $(x+2)(x-3)=0$ $x=-2, x=3$

$x=-2$ のとき、 $y=(-2)^2=4$ だから、A(-2, 4)

$x=3$ のとき、 $y=3^2=9$ だから、B(3, 9)

解答 A(-2, 4), B(3, 9)

1 図のように、放物線 $y=x^2$ と直線 $y=-2x+8$ の交点を A, B とするとき、
2点 A, B の座標を求めよ。



2 次の式で表される放物線と直線の交点の座標を求めよ。

(1) 放物線 $y=3x^2$, 直線 $y=-3x+6$

(2) 放物線 $y=-2x^2$, 直線 $y=-4x-16$

(3) 放物線 $y=\frac{1}{3}x^2$, 直線 $y=x+18$

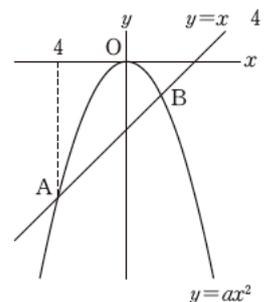
(4) 放物線 $y=-\frac{1}{4}x^2$, 直線 $y=x-3$

3 図のように、放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=x-4$ が 2 点 A, B で交わり、点 A の x 座標は -4 である。

(1) 点 A の y 座標を求めよ。

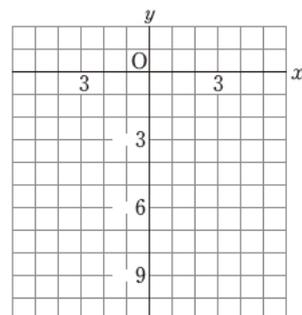
(2) a の値を求めよ。

(3) 点 B の座標を求めよ。



練習問題

1 (1) 関数 $y = -x^2$ について、 x の変域が $-3 \leq x \leq 2$ のとき、この関数のグラフをかけ。また、 y の変域を求めよ。



(2) 関数 $y = 3x^2$ について、 x の変域が次の①~③のとき、それぞれの y の変域を求めよ。

- ① $-3 \leq x \leq 2$ ② $4 \leq x \leq 8$ ③ $-5 \leq x \leq -1$

(3) 関数 $y = ax^2$ について、 x の変域が $-6 \leq x \leq 4$ のとき、 y の変域が $-18 \leq y \leq 0$ である。 a の値を求めよ。

2 次の関数について、変化の割合を求めよ。

(1) 関数 $y = 2x^2$ について、 x の値が次のように増加するときの変化の割合

- ① 3から5まで ② -4から-1まで

(2) 関数 $y = -\frac{1}{3}x^2$ について、 x の値が次のように増加するときの変化の割合

- ① -6から-3まで ② 1から5まで

3 (1) 関数 $y = ax^2$ について、 x の値が2から6まで増加するときの変化の割合は4である。 a の値を求めよ。

(2) 関数 $y = ax^2$ について、 x の値が1から3まで増加するときの変化の割合は6である。この関数について、 x の値が3から5まで増加するときの変化の割合を求めよ。

(3) 2つの関数 $y = ax^2$ と $y = 3x$ は、 x の値が1から5まで増加するときの変化の割合が等しい。このとき、 a の値を求めよ。

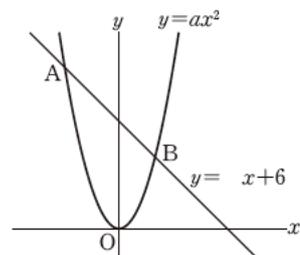
4 ある斜面でボールを転がしたとき、転がり始めてから x 秒間に転がる距離を y mとすると、

$y = \frac{5}{2}x^2$ の関係が成り立つ。次の場合の平均の速さを求めよ。

- (1) 転がり始めてから2秒後までの間 (2) 転がり始めて1.5秒後から2.5秒後までの間
- (3) 転がり始めて4秒後から8秒後までの間

5 図のように、放物線 $y = ax^2$ と直線 $y = -x + 6$ の交点をA、Bとするとき、点Aの x 座標は-3である。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 点Bの座標を求めよ。



実戦問題

- 1** (1) 関数 $y=x^2$ について、 x の変域を $a \leq x \leq a+2$ とすると、 y の変域が $0 \leq y \leq 4$ となるような a の値を、次のア～オの中からすべて選び、その記号を書け。 〈埼玉〉
- ア -2 イ -1 ウ 0 エ 1 オ 2

(2) 関数 $y=ax^2$ について、 x の変域が $-6 \leq x \leq 3$ のとき、 y の変域は $b \leq y \leq 6$ になる。
 a 、 b の値を求めよ。

(3) 2つの関数 $y=ax^2$ ($a > 0$)、 $y=x+b$ は、 x の変域が $-2 \leq x \leq 4$ のとき、 y の変域が同じになる。
 a 、 b の値を求めよ。

- 2** 関数 $y=-\frac{3}{4}x^2$ について、 x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

(1) 3から5まで (2) -6 から -4 まで (3) -2 から1まで

- 3** (1) $y=x^2$ について、 x が a から $a+5$ まで増加するとき、変化の割合は7である。 a の値を答えよ。 〈新潟〉

(2) x の値が1から5まで増加するとき、2つの関数 $y=ax^2$ と $y=-3x+1$ の変化の割合は等しい。
 a の値を求めよ。

(3) x の値が -6 から1まで増加するとき、関数 $y=ax^2$ の変化の割合が直線 $y=-x+7$ の傾きに等しい。
この関数の x の値が4から6まで増加するときの変化の割合を求めよ。

- 4** (1) ある自動車が動き始めてから x 秒に進んだ距離を y mとすると、 $0 \leq x \leq 8$ の範囲では $y=\frac{3}{4}x^2$ の関係があった。
この自動車が動き始めて1秒後から3秒後までの平均の速さは毎秒何mか、求めよ。 〈山口〉

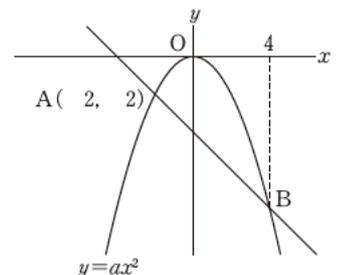
(2) ある斜面でボールを転がしたとき、転がり初めてから x 秒間に転がる距離を y mとすると、 y は x の2乗に比例し、転がり始めてから4秒間に転がる距離は10mである。転がり始めて2.7秒後から2.9秒後までの間の平均の速さは毎秒何mか。

- 5** 図のように、関数 $y=ax^2$ のグラフ上に点A(-2 , -2)と点Bがあり、点Bの x 座標は4である。 〈佐賀〉

(1) a の値を求めよ。

(2) 点Bの y 座標を求めよ。

(3) 直線ABの式を求めよ。



代表例題 1 | 関数 $y = ax^2$ の式

y は x の 2 乗に比例し、 $x=3$ のとき $y=-18$ である。

- (1) y を x の式で表せ。 (2) $x=4$ のときの y の値を求めよ。
 (3) $y=-8$ となるときの x の値を求めよ。

1 y は x の 2 乗に比例し、 $x=-2$ のとき $y=24$ である。

- (1) y を x の式で表せ。 (2) $x=-5$ のときの y の値を求めよ。
 (3) $y=54$ となるときの x の値を求めよ。

2 y は x の 2 乗に比例し、 $x=6$ のとき $y=-9$ である。

- (1) y を x の式で表せ。 (2) $x=8$ のときの y の値を求めよ。
 (3) $y=-50$ となるときの x の値を求めよ。

代表例題 2 | 変域

(1) 関数 $y=3x^2$ について、 x の変域が $-2 \leq x \leq 1$ のとき、 y の変域を求めよ。

(2) 関数 $y=ax^2$ について、 x の変域が $-4 \leq x \leq 3$ のとき、 y の変域が $-32 \leq y \leq 0$ である。 a の値を求めよ。

3 次の関数について、 y の変域を求めよ。ただし、 x の変域は () 内の範囲とする。

(1) $y=2x^2$ ($-1 \leq x \leq 3$) (2) $y=-3x^2$ ($1 \leq x \leq 3$) (3) $y=4x^2$ ($-2 \leq x \leq 5$)

(4) $y=-5x^2$ ($2 \leq x \leq 4$) (5) $y=\frac{1}{2}x^2$ ($-4 \leq x \leq -2$) (6) $y=-\frac{1}{3}x^2$ ($-6 \leq x \leq 3$)

4 関数 $y=ax^2$ について、 x の変域が $-3 \leq x \leq 2$ のとき、 y の変域が $-18 \leq y \leq 0$ である。 a の値を求めよ。

5 関数 $y=2x^2$ について、 x の変域が $a \leq x \leq 5$ のとき、 y の変域は $8 \leq y \leq 50$ である。 a の値を求めよ。

6 関数 $y=-\frac{1}{3}x^2$ について、 x の変域が $a \leq x \leq 3$ のとき、 y の変域は $-12 \leq y \leq b$ である。 a 、 b の値を求めよ。

代表例題 3 | 変化の割合

(1) 関数 $y=2x^2$ について、 x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

- ① 1 から 4 まで ② 0 から 8 まで ③ -5 から -1 まで

(2) 関数 $y=ax^2$ について、 x の値が 3 から 5 まで増加するときの変化の割合は 2 である。 a の値を求めよ。

7 関数 $y=3x^2$ について、 x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

- (1) 1 から 2 まで (2) 3 から 4 まで (3) -5 から -2 まで

8 関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ について、 x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

- (1) 2 から 8 まで (2) 0 から 4 まで (3) -7 から -3 まで

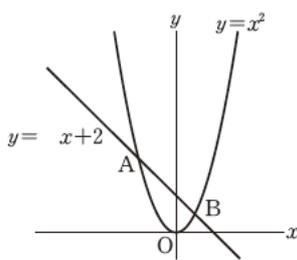
9 関数 $y=ax^2$ について、 x の値が -3 から -1 まで増加するときの変化の割合は 16 である。 a の値を求めよ。

10 関数 $y=ax^2$ について、 x の値が 2 から 7 まで増加するときの変化の割合は 3 である。 a の値を求めよ。

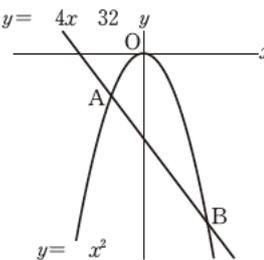
代表例題 4 | 放物線と直線の交点

次の図で、2 点 A, B の座標を求めよ。

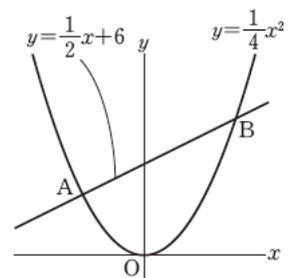
(1)



(2)

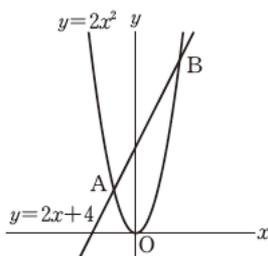


(3)

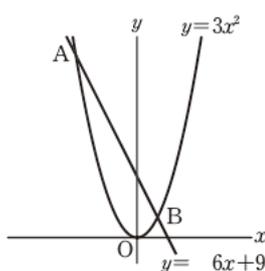


11 次の図で、2 点 A, B の座標を求めよ。

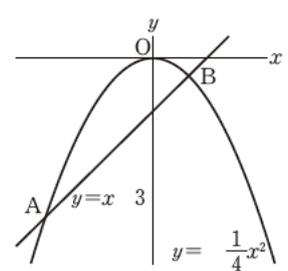
(1)



(2)



(3)

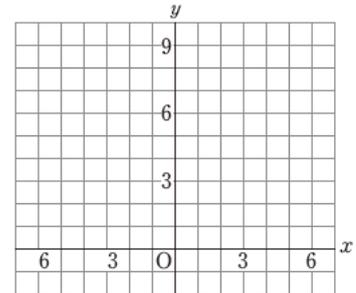


1 y は x の 2 乗に比例し、 $x=5$ のとき $y=200$ である。 (18点-各6点)

- (1) y を x の式で表せ。 (2) $x=-2$ のときの y の値を求めよ。
- (3) $y=72$ となるときの x の値を求めよ。

2 関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ について答えよ。 (18点-各6点)

- (1) $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフをかけ。
- (2) x の変域が $-4 \leq x \leq 6$ のときの y の変域を求めよ。
- (3) グラフが(1)のグラフと x 軸について対称である関数の式を求めよ。

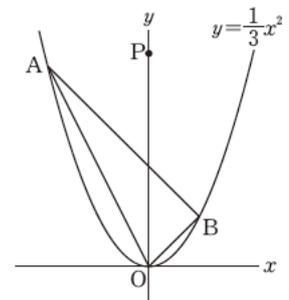


3 (1) 関数 $y=3x^2$ について、 x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めよ。 (16点-各8点)

- (2) 関数 $y=ax^2$ について、 x の値が 2 から 7 まで増加するときの変化の割合は -3 である。 a の値を求めよ。

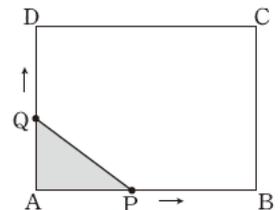
4 図で、点A、Bは関数 $y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフ上の点で、 x 座標はそれぞれ -6 、 3 である。点Pは y 軸上の正の部分にある。 (24点-各8点)

- (1) $\triangle AOB$ の面積を求めよ。
- (2) $\triangle AOB = \triangle POB$ のとき、点Pの座標を求めよ。
- (3) 点Bを通り $\triangle AOB$ の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。



5 $AB=8\text{cm}$ 、 $AD=6\text{cm}$ の長方形 $ABCD$ がある。点Pは辺 AB 上を点Aから点Bまで毎秒 2cm の速さで動き、点Qは辺 AD 上を点Aから点Dまで毎秒 1.5cm の速さで動く。2点P、Qが同時に点Aを出発してから x 秒後の $\triangle APQ$ の面積を $y\text{cm}^2$ とする。 (24点-各8点)

- (1) y を x の式で表せ。
- (2) x の変域を求めよ。 (3) y の変域を求めよ。



活用問題

運動会で、クラスの代表者4人が100mずつ走るクラス対抗リレーを行うことになった。リレーで勝つには効率よくバトンパスを行う必要があり、そのことで先生と陸人さんが話し合っている。

先生：リレーのランナーは決まったか？

陸人：うちのクラスからは、100m走のタイムが同じ4人の速いランナーが選ばれました。

先生：そうか、それは良かった。でも、ひとりひとりが速いからといって、勝てるとは限らないのがリレーだぞ。

陸人：はい、そこで、効率よくバトンパスができるよう、くふうしようと思っています。

先生：それはいい考えだ。よし、それでは、バトンを渡す人をAさん、受ける人をBさんとし、2人が走るようすをグラフで表して考えることにしよう。

陸人：グラフですか。それには x と y の関係を表す式をつくらないといけません。まず、2つの文字 x と y をどうおくのでしょうか。

先生：Bさんがスタートしてからの時間を x 秒、Bさんのスタート地点からの距離を y mとする。

4人とも、スタートしてからの2秒間でスムーズに加速し、2秒後からは走り終わるまで一定の速さで走れるから、 $0 \leq x \leq 2$ の範囲では、 y は x の2乗に比例し、 $x \geq 2$ の範囲では、 y は x の1次関数になると考えてみよう。スタートしてから2秒間で8m進み、2秒後からは秒速8mで走るのは計測済みだから、 x と y の関係を表す式は求められるのではないかな。

陸人：はい、 $0 \leq x \leq 2$ のとき、 $y = \underline{\text{ア}}$ ……①、

$x \geq 2$ のとき、 $y = \underline{\text{イ}}$ ……②です。

先生：合っているね。次に、Aさんについての式が決まれば、2人のグラフの交点を求めることで、どのタイミングで、かつどの地点でバトンパスが行われるか求められるな。

AさんがBさんのスタート地点の6m手前に来たときにBさんがスタートすると、どうなるかな？

ただし、バトンパスにかかる時間や減速、2人がのぼす腕の長さのことは考えないことにしよう。

陸人：バトンパスを行う前のAさんの速さは秒速8mだから、Aさんの式は $y = \underline{\text{ウ}}$ ……③です。

バトンパスが行われるのはBさんの加速中だから、①と③から y を消去して、 x についての方程式をつくり、それを解くと、 $0 \leq x \leq 2$ だから、 $x = \underline{\text{エ}}$ ①に代入して、 $y = \underline{\text{オ}}$

よって、Bさんがスタートしてから $\underline{\text{エ}}$ 秒後、Bさんのスタート地点から $\underline{\text{オ}}$ mの地点で、バトンパスが行われるとわかります。

ただ、これは効率よいバトンパスとはいえないと思います。

先生：そうだな。バトンパスが行われるときのBさんの速さが遅いからな。

これを速くするには、Bさんがスタートするときの2人の距離を6mからあと少し遠ざけるといいぞ。

陸人：10mだったらどうなるんだろう？

先生：10mだと、バトンパスができないぞ。

陸人：えっ、計算せずにわかるんですか？

(1) 上の会話文の中のア～オにあてはまる式または数を答えよ。

(2) Bさんがスタートするときの2人の距離が10mだとバトンパスができない理由を説明せよ。